P.S.K. – zajęcia planowe na 28.05.2020

Temat: Wprowadzenie do metody Monte Carlo.

W literaturze przedmiotu przyjmuje się, że metoda (właściwie metody) Monte Carlo (MMC) ujrzała światło dzienne w latach 40-tych XX w. Za jej ojców uważa się: Stanisława Ulama (ucznia Banacha, Polaka z Lwowa, emigranta) i Nicholasa Metropolisa oraz Johna von Neumanna. Był konkretny powód, aby te metody właśnie w tym czasie pojawiły się: z jednej strony budowa maszyny cyfrowej, z drugiej potrzeba chwili – realizacja Projektu Manhattan w Los Alamos. Uważa się niekiedy, że prekursorem tych metod był Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1777r) oraz Laplace (1820r), którzy wymyślili i zbadali jak się później okazało ważny eksperyment, zwany „problemem igły Buffona". Pisałem o tym w wykładzie z 16.04 (wykład 5).

Właśnie problem igły Buffona uważa się za klasyczny MMC. Dlatego prośmy o ponowną lekturę wykładu 5.

Inne klasyczne problemy MMC, to:

1) Obliczenie (numeryczne całek) z funkcji, dla których nie istnieją elementarne funkcje pierwotne i do ich obliczenia nie możemy stosować podstawowego tw. całkowego Riemanna–Newtona–Leibniza

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Np. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$, $\int_0^1 \sin^2\frac{1}{x}dx$

2) Wyznaczenie wartości ekstremalnych funkcji, dla których metody rachunku różniczkowego są mało efektywne

Geneza MMC bazuje na zjawisku „próbkowania” i modelowania tego zjawiska metodami statystyki matematycznej ze wszelkimi jej konsekwencjami) w szczególności estymacji obiektów.

P.1. (Obliczanie całek).

Załóżmy, że interesuje nas całka $\int_0^1 f(x)dx$, gdzie f ma złożoną postać i wyznaczenie f. pierwotnej jest trudne bądź niemożliwe metodami klasycznymi.

Istnieje metoda oparta na MMC obliczenia tej całki wykorzystująca zjawisko losowania.

Mianowicie, przypuśćmy, że dysponujemy próbą $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, gdzie X_j - niezależne zm. losowe o rozkładzie $U([0,1])$.

Wtedy statystyka

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j)$$

jest estymatorem całki, co jest konsekwencją Mocnego Prawa Wielkich Liczb, bowiem zdarzenie

- 4

$$\left\{\omega \in \Omega : \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j)(\omega) \xrightarrow[n]{} E(X)\right\}$$

ma prawdopodobieństwo jeden, oraz

$$Ef(X) = \int_0^1 f(x)\,dx .$$

Stąd, dla odpowiednio dużych n, mamy przybliżenie

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j)(\omega) \cong \int_0^1 f(x)\,dx}$$

Oczywiście, X_j są liczbami (pseudo)losowymi generowanymi z $[0,1]$.

Weźmy przykład numeryczny

$$\int_0^1 \underbrace{\left[\sin^2(5x) + \cos^4(10x) + \left(\frac{1}{2}\sin(20x) + \frac{1}{4}\cos(5x)\right)^2\right]}_{f(x)} dx$$

Widać, iż wygląda to nieciekawie z punktu wiedzenia rachunku różniczkowego.

Z twierdzenia o istnieniu f ma F, że $F' = f$ i można stosować metody klasyczne. W tym przypadku wyznaczenie F jest zbyt pracochłonne – nieopłacalne.

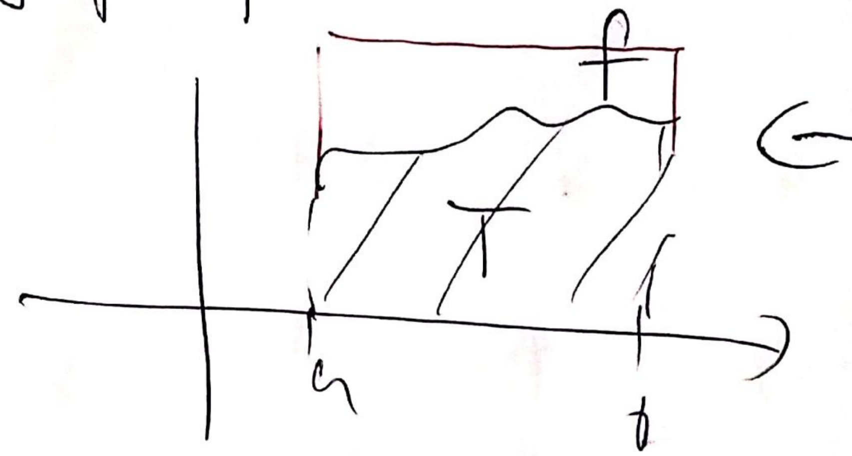
Co robimy? Dla n odpowiednio dużego generujemy n-liczb (pseudo) losowych: $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}[0,1]$)

Wtedy

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\sin^2 5U_i + \cos^4(10U_i) + \left(\frac{1}{2}\sin(20U_i) + \frac{1}{4}\cos(5U_i)\right)^2\right]$$

Problem całki można rozwiązać MMC wykorzystując <u>aspekt geometryczny</u> tego zagadnienia.

Wiemy, że jeśli $f \geq 0$ (założenia techniczne), to liczba $\int_a^b f(x)dx$ jest miarą wielkości figury płaskiej T



czyli

$$\int_a^b f(x)dx = |T|$$

Zauważmy, że T jest zawarta w prostokącie (na czerwono). Wyobraźmy sobie procedurę losowania:

$\Omega \ni \omega = (x,y) \in T$ sprzyjających punktów z Ω, które są tym prostokątem.

Jak wiemy z poprzednich wykładów jest to przypadek tzw. <u>modelu geometrycznego</u>

2d Kołmogorow:

Wtedy P(A) – prawdop. zdarzenia A, że wylosowany punkt ze zbioru T wypadnie

$$P(A) = \frac{|T|}{\text{pole prost.}} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\text{pole prost.}},$$

Stąd

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(A) \cdot (\text{pole prostokąta})$$

Ale

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{\#\text{ punktów } (x,y):\ y < f(x)}{\#\text{ wszystkich punktów}}$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \frac{M}{N}, \text{ skąd}$$

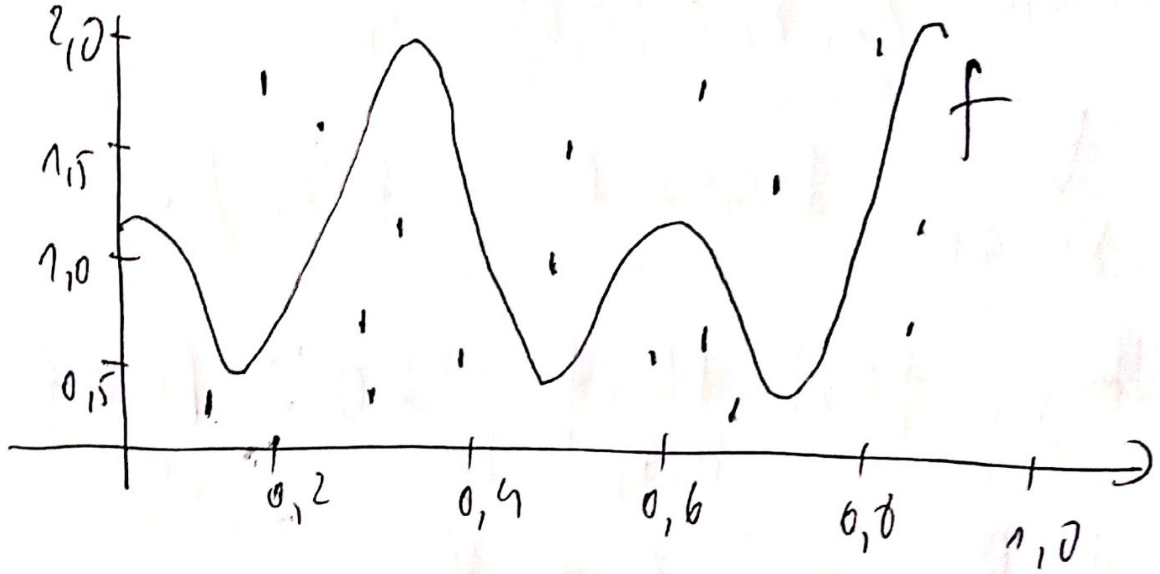
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (\text{pole prost.}) \lim_{N \to \infty} \frac{M}{N}}, \text{ czyli}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong (\text{pole prost.}) \frac{M}{N}$$

Biorąc f z przykładu wyżej mamy:

prostokąt $= [0,1] \times [0,2]$, bo $\max\limits_{[0,1]} f = 2$

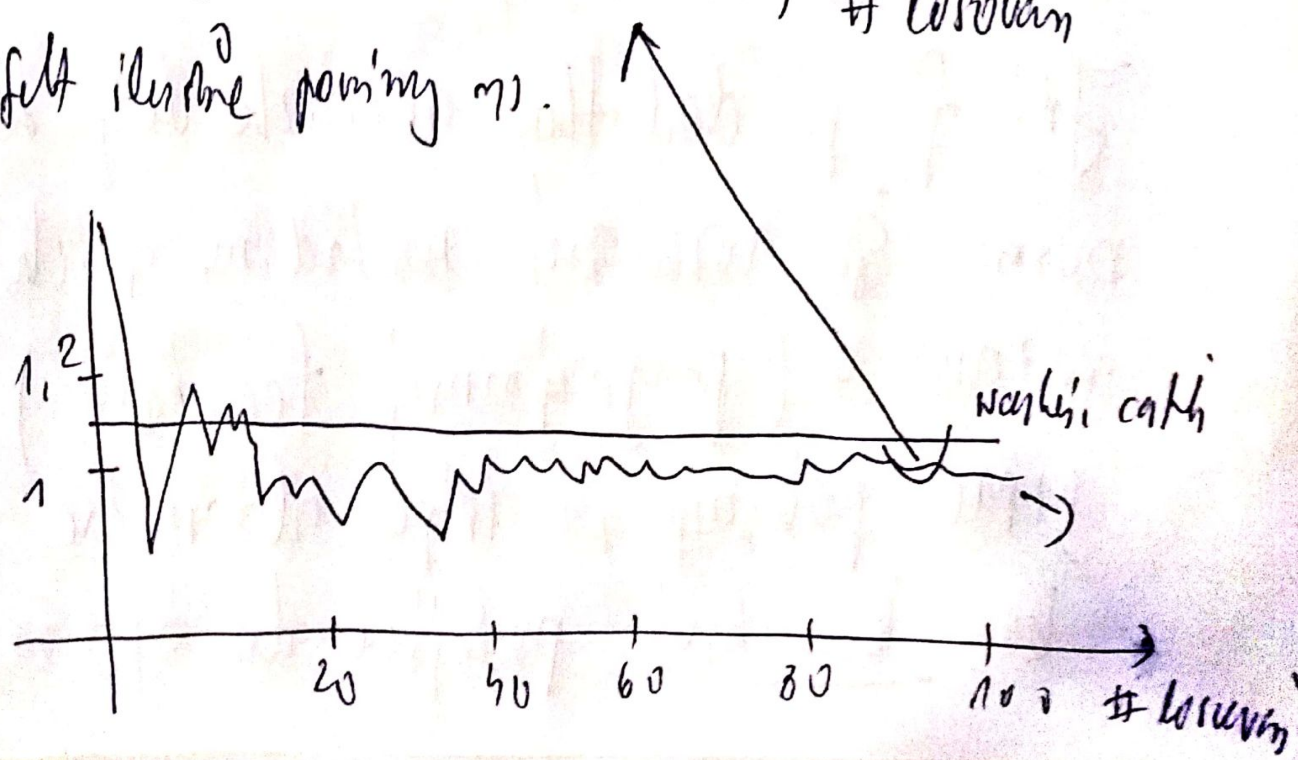
Sytuacja wygląda następująco



punkty – wyniki procesu losowania

Wtedy $\int_0^1 f(x)dx \approx 2 \cdot \frac{n_0}{n}$ $n_0 \to$ # punktów w T, $n \to$ # losowań

Efekt ilustruje poniższy rys.



7.2. Rozwiązanie problemu ekstremum globalnego.

Problem brzmi:

dla funkcji ciągłej $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

wyznaczyć $x_1, x_2 \in [a,b]$, że

$$\forall_{x \in [a,b]} \quad f(x_1) \le f(x) \le f(x_2).$$

Wtedy $f(x_1) = \underset{[a,b]}{\mathrm{Min}}\, f$, $f(x_2) = \underset{[a,b]}{\mathrm{Max}}\, f$

Z t. funkcji rzeczywistych wiadomo, że problem ten ma zawsze rozwiązanie (jest to słynne tw. WEIERSTRASSA)

Jeśli f jest dodatkowo różniczkowalna, to można go rozwiązać metodami rachunku różniczkowego (pomińmy inne techniki).

MMC pokazuje, że istnieje alternatywne, bo stochastyczne podejście do tego zagadnienia.

Mianowicie, najprostsza wersja MMC mówi, że w tym celu należy

1°. wygenerować ciąg liczb (pseudo) losowych $u_1, u_2, \dots, u_n$ z dziedziny f

2°. Wziąć zbiór $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$

3°. wybrać z tego zbioru liczbę największą (dla Max) lub najmniejszą (dla Min)