Kurs PSK Inf 3

st. stacj. / niest.

tryb on-line

Wykład 3

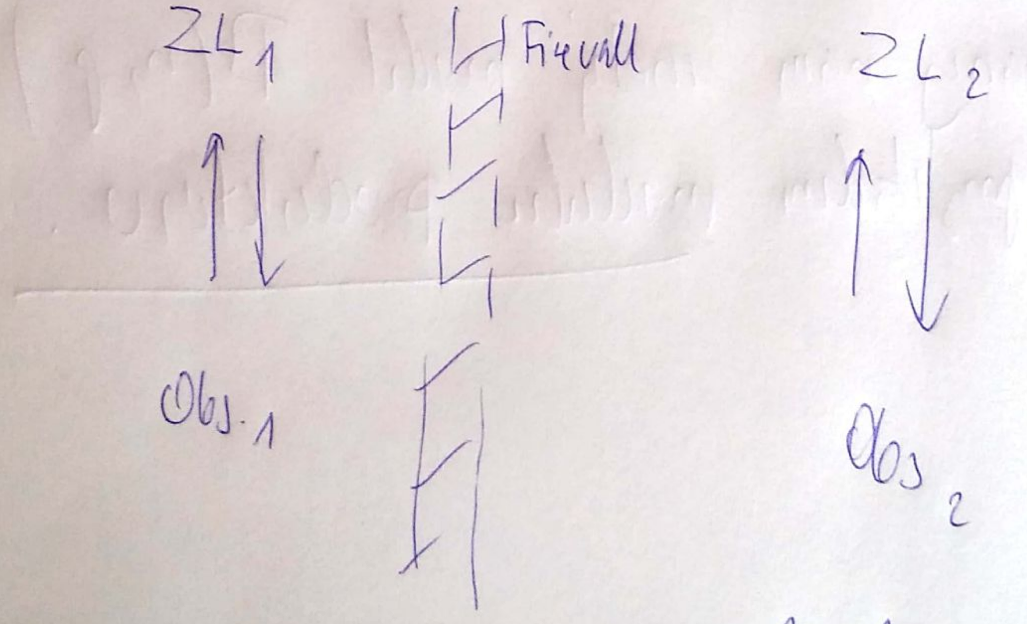
Temat: Przegląd MPK c.d.

Podamy konstrukcję drugiego, ważnego MPK (Ω, Σ, P). Będzie to model produktowy.

Zaczniemy od sytuacji najprostszej — $n=2$.

Mamy dwa zjawiska losowe: ZL_1, ZL_2, każde obserwowane przez swojego obserwatora i odseparowane od siebie, tzn. między nimi nie ma żadnej interakcji;

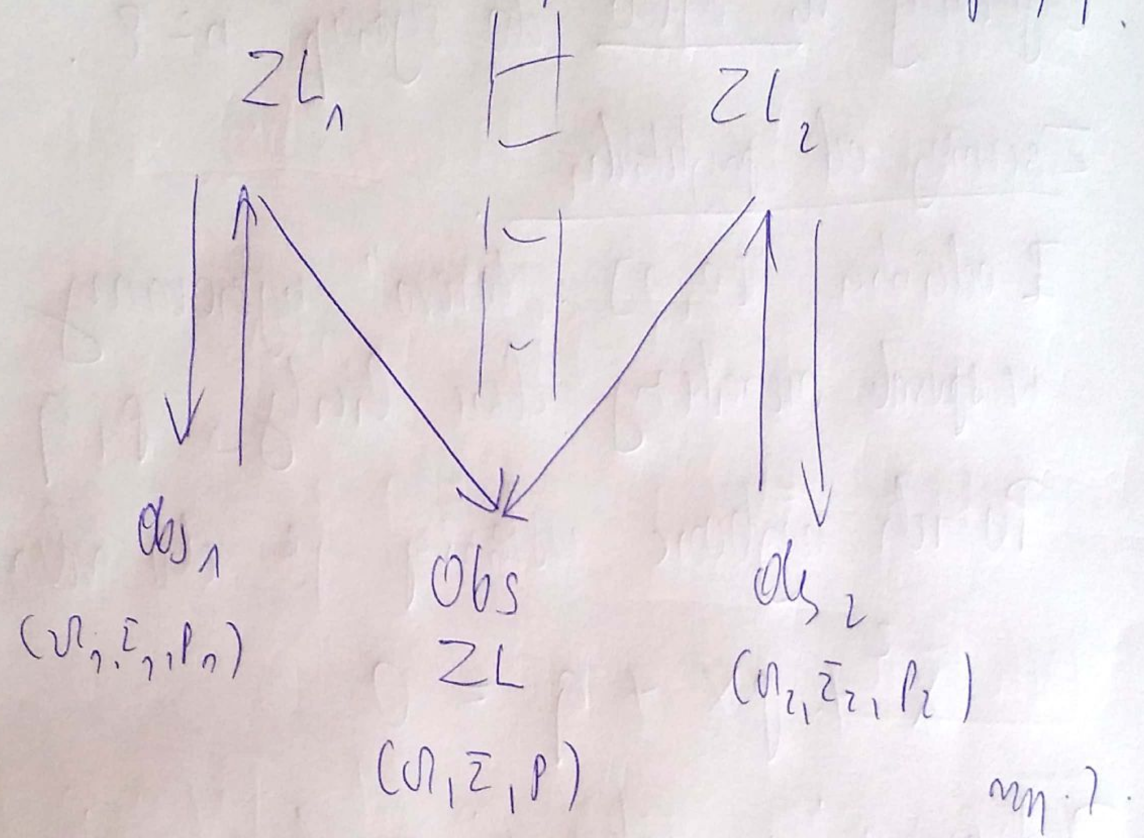
Mamy zatem wyobrażenie następującej sytuacji



rys 1.

Niech $(\Omega_1, \Sigma_1, P_1)$ i odpowiednio $(\Omega_2, \Sigma_2, P_2)$ będą MPK odpowiadającymi ZL_1 i ZL_2.

Podamy teraz konstrukcję, która pozwala opisać jednocześnie oba zjawiska, nie zmieniając założeń danych pomiarów.



Wynikiem tej konstrukcji jest MPK (Ω, Σ, P), gdzie

$$\Omega \overset{df}{=} \Omega_1 \times \Omega_2, \quad \text{a więc}$$

$$\Omega \ni \omega = (\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 \in \Omega_1, \quad \omega_2 \in \Omega_2$$

Pomiarowi zdarzenia elementarne MPK rejestruje

wyniki obserwacji danego zj. losowego,
w naszym przypadku:

- porządkujemy (umownie) ~~te~~ zjawiska
- obsadzamy ~~te~~ miejsca wynikami obserwacji

$$\begin{array}{ccc} Obs_1 & & Obs_2 \\ \downarrow \omega_1 & & \downarrow \omega_2 \\ (\, \cdot & , & \cdot \,) \end{array} = \omega$$

Wtedy parę uporządkowaną (ω_1, ω_2) traktujemy jako wynik obserwacji ω wirtualnego obserwatora Obs, wirtualnego zjawiska losowego ZL.

Typowe zdarzenie A odpowiadające temu ZL ma postać

$$A = A_1 \times A_2, \text{ gdzie } A_1 \in \Sigma_1, \ A_2 \in \Sigma_2$$

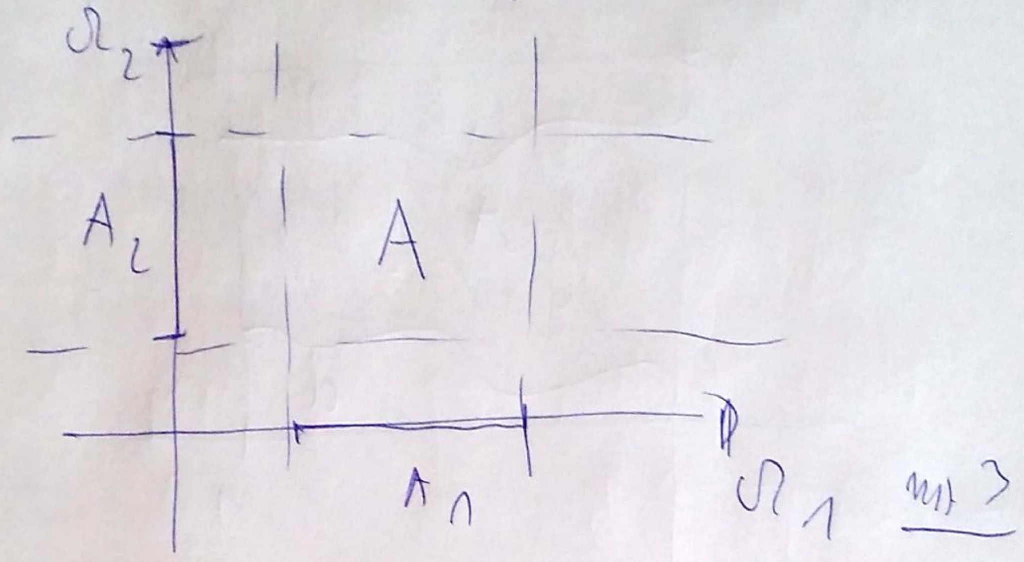
Nazywamy je prostokątem losowym.

Zbiór wszystkich zdarzeń, czyli Σ opisujemy jako

$$\Sigma = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$$

i nazywamy σ-ciałem zdarzeń produktowych.

Ilustracja dla sytuacji jak następująca



P jest miarą, czyli f. prawdopodobieństwa określoną na zdarzeniach prostokątach. Dla prostokątów losowych mamy

$$(*) \quad \boxed{P(A) = P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2)}$$

Uwaga: Spójrzmy na rys. 3. A jest „prostokątem" o „bokach": „A_1" i „A_2".

Zatem $(*)$ mierzy „pole powierzchni" A.

MPK, który powstaje jak wyżej nazywamy modelem produktowym wymiaru 2

Sprawdźmy teraz, czy ten model respektuje izolację składowych MPK.

W tym celu dla $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$ weźmy dwa zdarzenia

$$A \stackrel{df}{=} A_1 \times \Omega_2 \quad \text{(ZL rejestruje dokł. to co widzi } Obs_1\text{)}$$

$$B \stackrel{df}{=} \Omega_1 \times A_2 \quad \text{(ZL rejestruje dokł. to co widzi } Obs_2\text{)}.$$

Model produktowy widzi te zdarzenia następująco:

$$P(A \cap B) = P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) P_2(A_2) =$$
$$= \left(P_1(A_1) \cdot P_2(\Omega_2)\right)\left(P_1(\Omega_1) P_2(A_2)\right) =$$
$$P(A_1 \times \Omega_2) \cdot P(\Omega_1 \times A_2),\ \text{czyli}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) P(B)},$$

Na koniec weźmy ważne sytuacje:

$\Omega_1 = \Omega_2 = \ldots = \Omega_n = \Omega_0$, zatem

obserwujemy <u>łącznie</u> wyniki serii <u>powtórzeń niezależnych</u> ZL_0 (np. n-krotny rzut pojedynczą monetą).

Wtedy $\Omega = \Omega_0^n \; (= \underbrace{\Omega_0 \times \Omega_0 \times \ldots \times \Omega_0}_{n})$

$$\Sigma = \otimes \Sigma_0$$

$$P(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = P_0(A_1) P_0(A_2) \ldots P_0(A_n)$$

Wreszcie, niech $|\Omega_0| = 2$, czyli

$\Omega_0 = \{0, 1\}$ $\quad$ 0 – „porażka"

$\quad$ 1 – „sukces"

$P_0(\{0\}) = q$, $P_0(\{1\}) = p$, $p \in (0, 1)$

$p + q = 1$.

Weźmy

$\Omega_0^n = \Omega \ni \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, $\omega_j \in \{0, 1\}$

co oznacza, że A & B są stochastycznie niezależne.

i o to dokładnie chodziło!

Uogólnienie

ZL_1	ZL_2	$\dots$	ZL_n
$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$		$\uparrow\downarrow$
Obs_1	Obs_2	$\dots$	Obs_n
$(\Omega_1, \Sigma_1, P_1)$	$(\Omega_2, \Sigma_2, P_2)$		$(\Omega_n, \Sigma_n, P_n)$

n

ZL

Obs

(Ω, Σ, P) model produktu stopnia n

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$

$\Omega \ni \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_j \in \Omega_j$

$P(A) = P(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P_1(A_1) P_2(A_2) \cdot \dots \cdot P_n(A_n)$ $\longrightarrow$ n-krotne losowanie.

Dlatego

$$\{\omega\} = \underbrace{\{\omega_1\} \times \{\omega_2\} \times \ldots \times \{\omega_n\}}_{}$$

n-kostka elementarna.

Stąd

$$P(\{\omega\}) = P_0(\{\omega_1\}) P_0(\{\omega_2\}) \cdot \ldots \cdot P_0(\{\omega_n\})$$

$$= p^k (1-p)^{n-k}, \text{ gdzie}$$

$$k = \#\{j \; \omega_j = 1\}$$

<u>WNIOSEK</u>.

Znany nam wcześniej model $B(n, p)$ jest przykładem <u>modelu produktowego</u>. !

Model geometryczny.

Przegląd MPK zakończy przykładem tzw. m. geometrycznego.
Dalej zrozumiemy dlaczego ten przykład jest ważny!

Ograniczmy się tylko do sytuacji $n=2$.

Zacznijmy od przykładu.

Z odcinka $[0,1]$ „losowo" wybieramy w sposób niezależny dwie liczby p, q.
Po ich wyborze wstawimy je do równania

$$x^2+px+q=0$$

Pytamy się: jakie jest prawdop., że równanie to nie będzie miało pierw. rzeczywistego?.

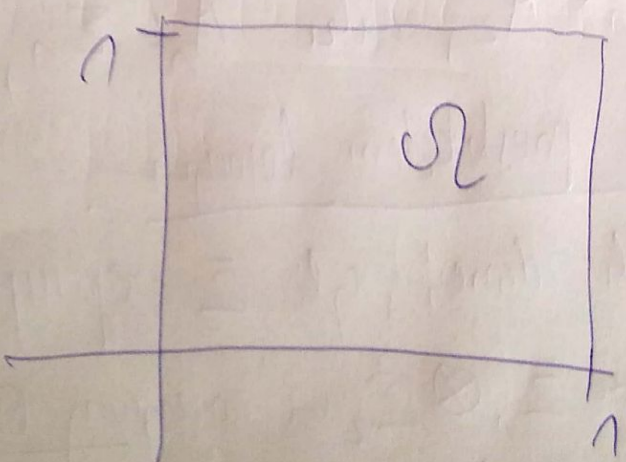
Zauważmy, że wybór liczb jest przykładem ZL - nie wiemy co w chwili wyboru zdarzy się, (≡ nie znamy tych liczb), ale wiemy, że będą to liczby z $[0,1]$.

Dlatego problem opisany wyżej ma swój MPK - (Ω, Σ, P).

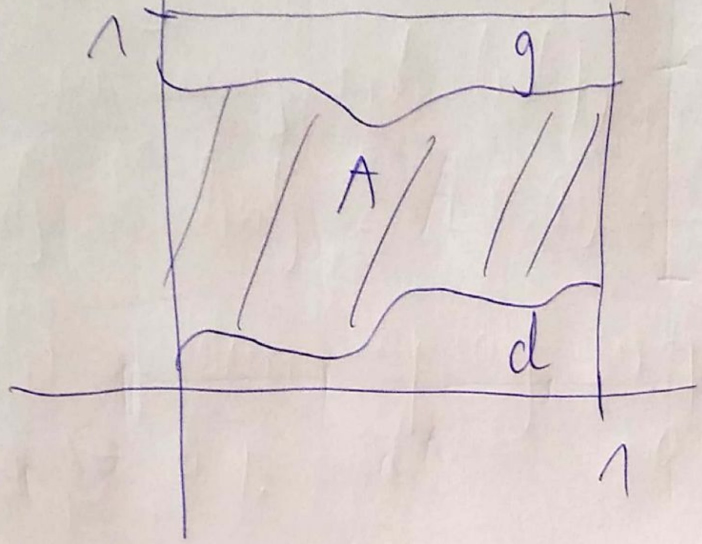
Należy skonstruować ten MPK, z Σ wybrać odpowiednie zdarzenie A_0 i obliczyć wartość P dla A_0, czyli $\underline{P(A_0)}$.

- Konstrukcja (Ω, Σ, P).

$\Omega = [0,1] \times [0,1]$ (model produktowy)



Typowe zdarzenie $A \in \Sigma$ ma postać



gdzie $d, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funkcje ciągłe,

czyli $A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : d(x) \leq y \leq g(x)\}$

(A nazywamy „trapezem krzywoliniowym").

Wtedy $P(A) = \int_0^1 (g(x) - d(x))\, dx$,

---

czyli pole powierzchni A $\equiv$ prawdop. A (!!!)

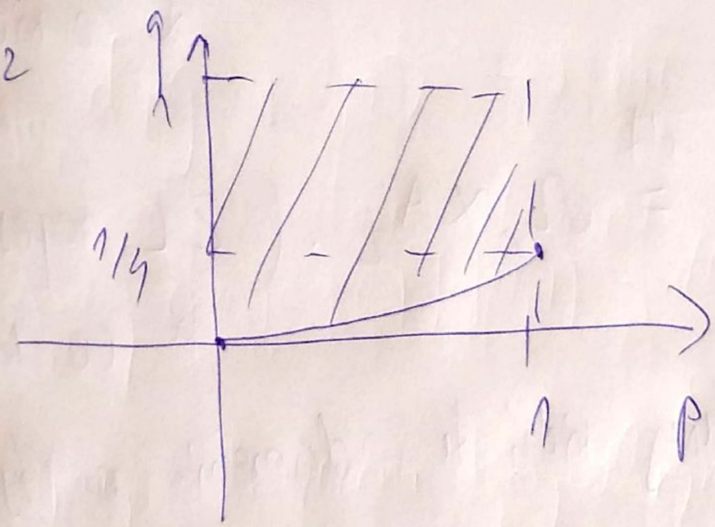
• zbiór A_0

$(p,q) \in A_0 \iff x^2 + px + q = 0$ nie ma rozw. rzeczyw. $\iff$

$p^2 - 4q < 0$, $p,q \in [0,1]$

$\iff$

$q > \frac{1}{4}p^2$



Dlatego

$P(A_0) = 1 - P(A_0^c)$.

Ale $P(A_0^c) = \int_0^1 \frac{1}{4} p^2 \, dp =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} p^3 \Big]_0^1 = \frac{1}{12}$

Zatem $P(A_0) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.