Kurs PSK Inf 3
st. stacj. / niest.
tryb on-line
W.4

Temat. Przegląd MPK c.d. Wprowadzenie do teorii rozkładu prawdopodobieństwa.

Problem Buffona (p. [RR] s. 37-38)

Na płaszczyźnie usytuowano w odległości d proste równoległe. Eksperyment polega na tym, iż opuszczamy na tę płaszczyznę igłę długości d. Eksperyment pomyślne tzn., jeśli igła na skutek upadku będzie leżała na tej płaszczyźnie.

[P.D.] Z jakim prawdopodobieństwem igła po upadku na płaszczyznę przetnie jedną z prostych?

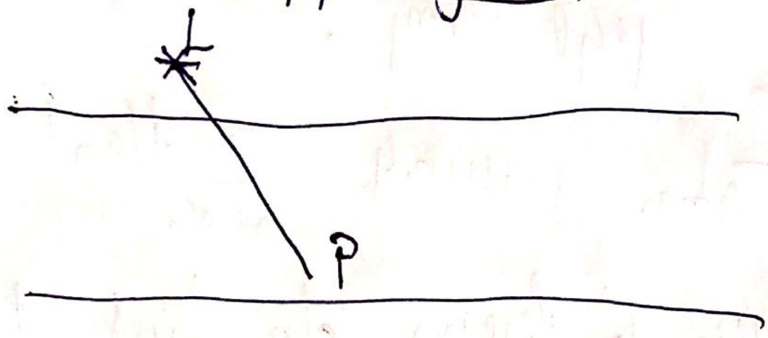
Uwagi:

1°. Termin „przetnie" wyklucza zjawisko „dotknie". Zatem igła może przeciąć tylko jedną z linii.

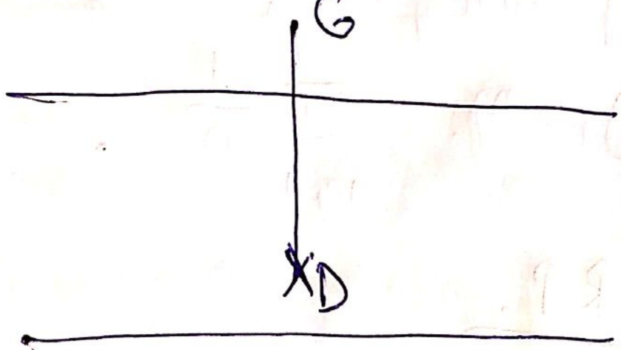
2°. Eksperymentator wykonujący rzut igłę zajmuje stałe położenie względem linii. Zakładamy, iż jego rzut w ogóle przecina linię pod kątem 90°.

3°. Jeśli igła upadnie, to

a) kiedy nie jest prostopadła do linii, wyróżnimy jej lewy koniec



b) kiedy jest prostopadła, dolny koniec

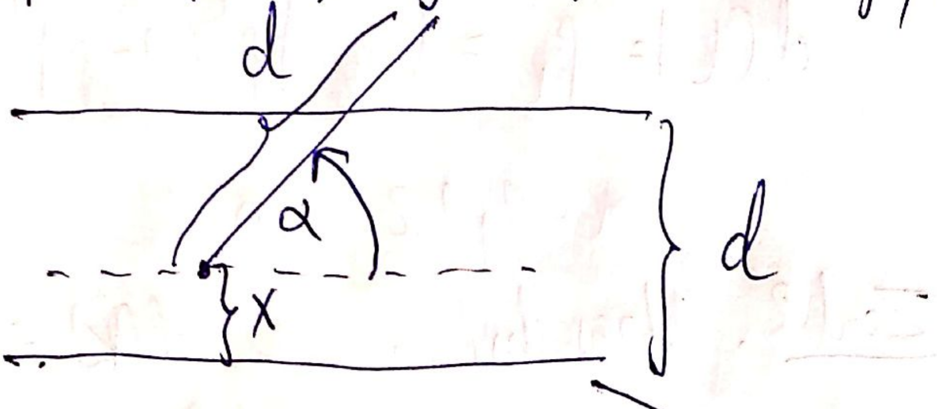


<u>Model teoretyczny [P.D] i jego rozwiązanie</u>:

Składniki: (Ω, Σ, P), $A \in \Sigma$ i obliczyć $P(A)$, A - opisuje [P.B.].

W tym celu potrzebujemy dobrze dobranego układu odniesienia

Układem będzie tor (jedyna) prosta P_k która znajduje się poniżej wyróżnionego końca igły.



element ukł. odniesienia

W takim układzie (na płaszczyźnie) położenie igły opiszemy parą liczb: x, α, gdzie

(i) x – odl. końca od linii ukł. odniesienia

(ii) α – miara kąta skierowanego, liczonego od prostej układu, w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara do prostej wyznaczonej przez igłę.

Niech $\omega = (x, \alpha)$ oraz

$\Omega = \{\omega = (x, \alpha) : x \in (0, d),\ \alpha \in [0, \pi)\}$

Σ - σ-ciało zbiorów borelowskich,

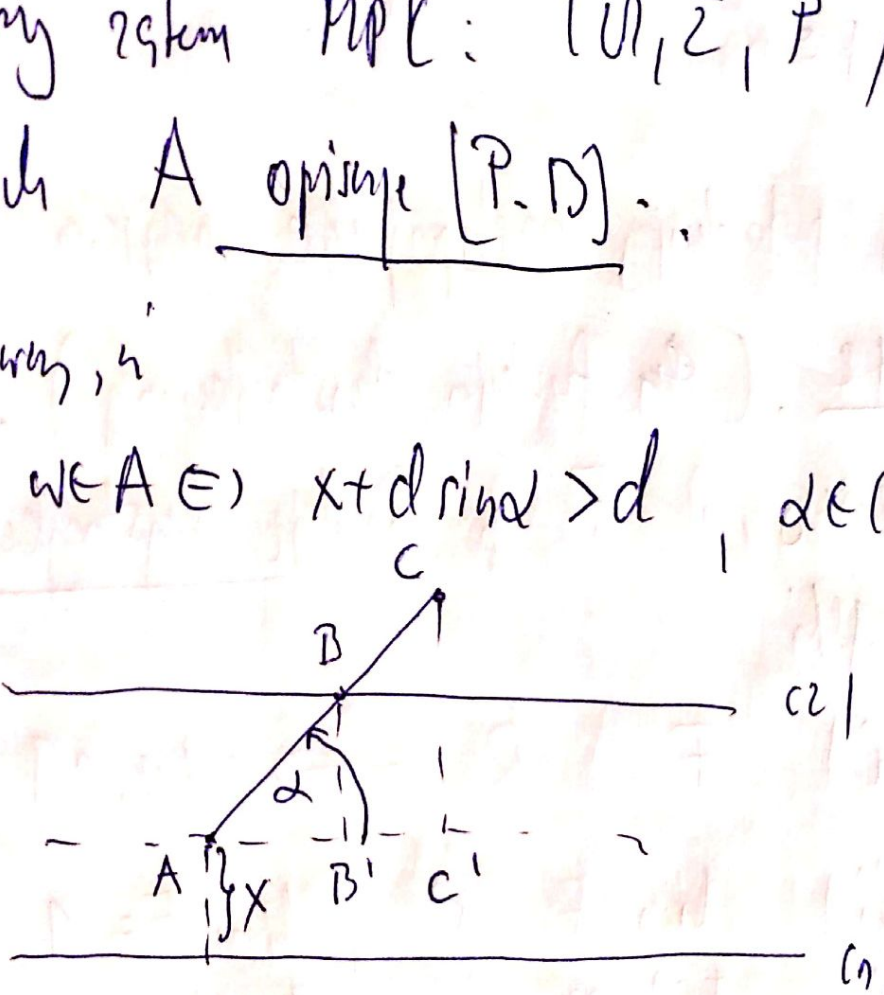
P - prawd. zdefiniowane w 2-wym. modelu geometrycznym.

Mamy system MPK: (Ω, Σ, P).

Niech A opisuje [P.D].

Zauważmy, że

(*) $\omega \in A \iff x + d \sin\alpha > d, \quad \alpha \in (0, \pi)$



Istotnie, igła przetnie linię (tutaj (2)) $\iff$ x, α będą takie, że: $x + |CC'| > d$.

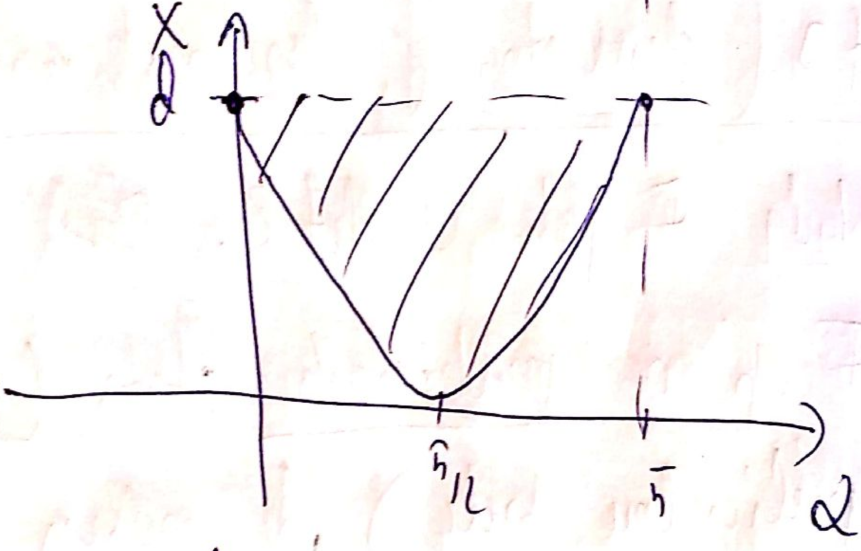
Ale z $\Delta AC'C$: $\sin\alpha = \frac{|CC'|}{d} \Rightarrow$ $|CC'| = d \sin\alpha$, co daje (*).

Zadnja:

$$A = \{ (x,\alpha) : \alpha \in (0,\pi) , x + d\sin\alpha > d \}$$

$$= \{ (x,\alpha) : \alpha \in (0,\pi) : d(1-\sin\alpha) < x < d \}$$

Spodaj na ilustraciji A (: območje zakrasleno).



Izračunajmo ploščino A do P(A), torej:

$$P(A) = \frac{\int_0^{\pi} (d - d(1-\sin\alpha))\, d\alpha}{\pi \cdot d} =$$

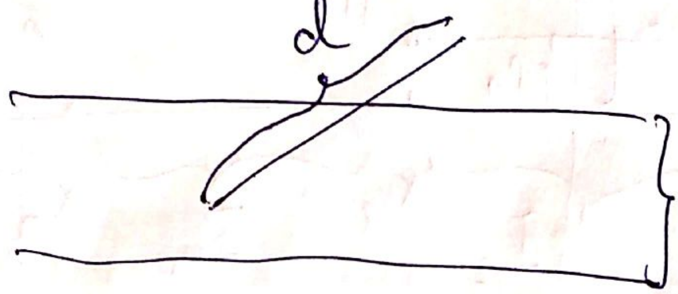
$$= \frac{1}{\pi d} d \int_0^{\pi} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{1}{\pi} \left[-\cos\alpha \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\cos\pi + \cos 0 \right]$$

Dlatego $\boxed{P(A) = \frac{2}{\pi h}}$

ZAD 1.

Rozwiązać sytuację, kiedy



, $h \leq d$

Wstęp do teorii rozkładu prawdop.

Wiemy już, istnieje związek pomiędzy ZL a jego modelem P.K. (Ω, Σ, P), tj.

$\forall$ ZL $\exists$ (Ω, Σ, P) i na odwrót

Każdej (Ω, Σ, P) odpowiada co najmniej jedna ZL.

Dotychczasowy opis (model) ZL, MPK (Ω, Σ, P) ma wady:

$\omega \in \Omega$ na ogół nie są liczbami.

Z tego powodu potrzebna jest procedura konwersji $\omega \longrightarrow r \in \mathbb{R}$.

Jak zobaczymy prowadzi to do pojęcia rozkładu prawdopodobieństwa (R.P.)

(I) Przypadek dyskretnego R.P. (D.R.P.).

Def 1. (D.R.P.)

Powiemy, że mamy D.R.P., jeśli dana jest funkcja d (od „distribution"), taka, że

$$d : A \longrightarrow [0,1], \text{ gdzie}$$

$$A = \{a_n, n \in N_0 \subset N\} \subset \mathbb{R},$$

N - zb. liczb całk. dodatnich

$$\sum_{n \in N_0} d(a_n) = 1 .$$

Dalej będę oznaczał: $d(a_n) = p_n$, $n \in N_0$.

<u>Uwagi</u>:

1° Ponieważ $n \in N_0 \subset N$, oznacza, iż A jest zbiorem <u>przeliczalnym</u>.

W szczególności, gdy N_0 jest zbiorem skończonym, to piszę

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

$$d(a_j) = p_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} d(a_j) = 1,$$

co mamy przedstawić następująco

d:

a_1	a_2	$\ldots$	a_n
p_1	p_2	$\ldots$	p_n

2°. Jeśli N_0 nie jest skończony, to

$\sum_{n\in N_0} d(a_n)$ oznacza: szereg liczbowy i

jego sumę.

Zatem warunek $\sum_{n\in N_0} d(a_n)$ oznacza, że

szereg jest zbieżny do liczby 1.

Należy pamiętać, że nie każdy szereg jest zbieżny, np. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Przykłady D.R.P.

1°. 2-punktowy standardowy

$A = \{0,1\}$, d:

0	1
$q=1-p$	p

, $p\in(0,1)$

2°. Rozkład $B(n,p)$ - Bernoulliego - Newtona

$p \in (0,1)$

$d: A \longrightarrow [0,1]$,

$A = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$,

$$d(k) \overset{df}{=} p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Zad 2. Uzasadnić, że $\sum_{k \in A} d(k) = 1$

3°. Rozkład $P(\lambda)$ - Poissona, $\lambda > 0$

Tutaj: $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$d(k) = p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zad 3. Uzasadnić, że $\sum_{k \geq 0} d(k)$ jest zbieżny do 1.

4°. Rozkład dyskretny jednostajny

$A \subset \mathbb{R}$ n-elementowy $(n \geq 2)$ podzbiór $\mathbb{R}$,

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$$\forall_{1 \leq j \leq n} \quad d(a_j) = \frac{1}{n}.$$

Dalej potrzebujemy następującego pojęcia.

<u>Def 2</u>. (~~dy~~ funkcja dystrybuanty).

Powiemy, że F jest funkcją <u>dystrybuanty</u>, jeśli

(i) $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

(ii) $\lim_{t \to -\infty} F = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F = 1$

(iii) F jest niemalejąca, czyli

$$\forall_{t_1, t_2} \quad t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1) \leq F(t_2)$$

(iv) F jest co najmniej lewo-stronnie ciągła, czyli

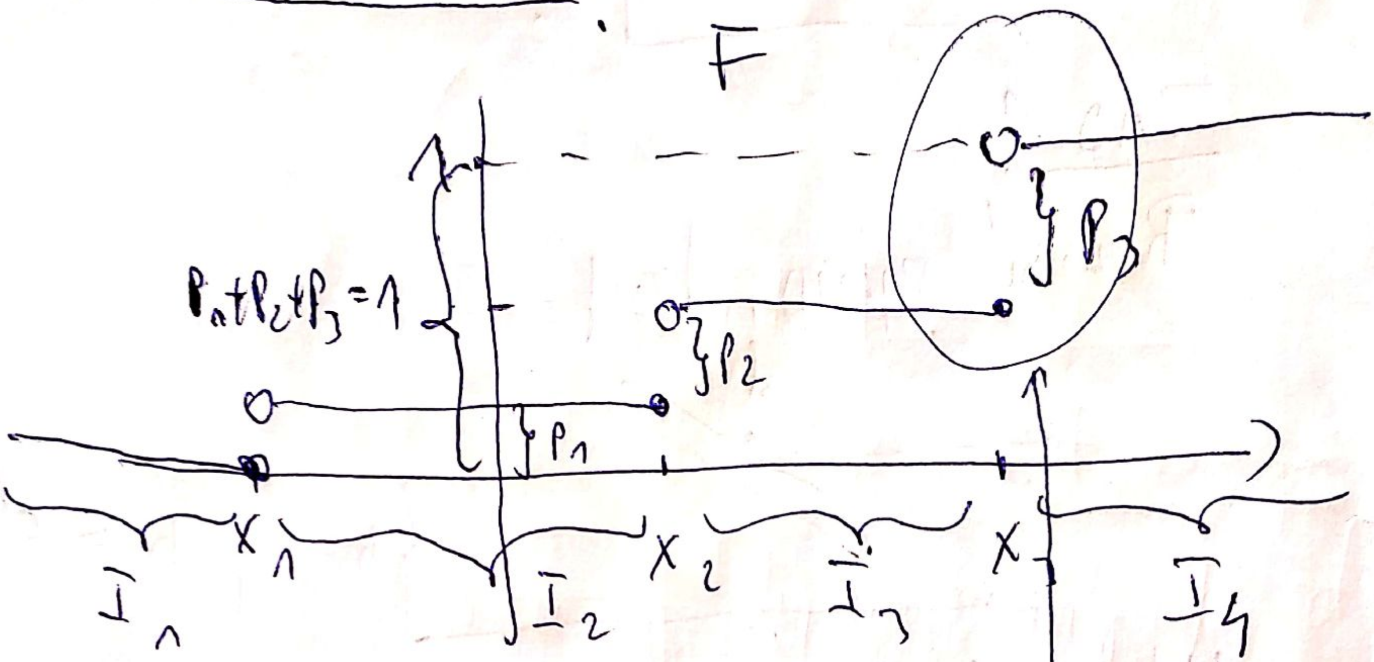
$$\forall t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \to t_0^-} F = F(t_0).$$

<u>Def 3 (dyskretna f. dystrybuanty)</u>

Niech F jak w def 2. Jeśli dodatkowo F jest na <u>przedziałach</u> stała (jest ich przeliczalnie wiele), to mówimy, że F jest D.F.D.

Przykład (D.F.D)



Tutaj (i) I_1, I_2, I_3, I_4 są przedziałami, o których mowa w Def 2

(ii) warunek (ii) Def 2 jest spełniony

(iii) warunek (iii) zachodzi

(iv) warunek (iv) oznacza, że

$(\phi \Leftrightarrow \psi \vee \psi \Leftrightarrow \phi)$ 4

$(\phi \Leftrightarrow \psi)$ 4 $\wedge (\psi \Leftrightarrow \phi)$ L t.N.V. / S.N.V Z

(13)

Zauważmy, że F daną jak wyżej można opisać inaczej:

Niech $A = \{x_1, x_2, x_3\}$

czyli punkty, które dzielą $\mathbb{R}$ na przedziały.

$$p_1 = d(x_1) \stackrel{df}{=} \lim_{t \to x_1^+} F - F(x_1)$$

$$p_2 = d(x_2) \stackrel{df}{=} \lim_{t \to x_2^+} F - F(x_2)$$

$$p_3 = d(x_3) \stackrel{df}{=} \lim_{t \to x_3^+} F - F(x_3),$$

czyli p_j – „skok” (zmiana tego skoku) w pkt x_j.

Jasne jest, że $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, zatem

$$F \longrightarrow d: \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 \end{array}$$

(14)

Na odwrót, mając rozkład d, można go wyreprezentować D.F.D.

Weźmy przykład:

d:

-1	2	4	5,5
0,1	0,2	0,3	0,4

Konstrukcja F

Krok 1: podział $\mathbb{R}$ przedziałami

$I_1=(-\infty,-1)$, $I_2=(-1,2\rangle$,

$I_3=(2,4\rangle$, $I_4=(4,5{,}5\rangle$, $I_5=(5{,}5,+\infty)$

Krok 2 rysujemy f. przedziałami stałą, niemalejącą, lewostronnie ciągłą o granicy w $-\infty = 0$, $+\infty = 1$

i o skokach