Kurs PSK Inf 3

st. stacj. / niest.

tylko on-line

W5

Temat. Rozkład prawdopodobieństwa c.d.

(I) Rozkład dyskretny c.d.

Przypomnienie: poznaliśmy definicję rozkładu dyskretnego d, dowiedliśmy, że ma on jednoznaczną reprezentację poprzez D.F.D. F, czyli $d \Longleftrightarrow F$, którą nazywamy funkcją skoków.

Problem.

Jak te pojęcia mają się do ZL i MPK?

Zajmijmy się teraz tą kwestią.

Zacznijmy od najprostszej definicji.

Def 1 (dyskretnej zmiennej losowej)

Niech dane będzie ZL oraz jego MPK (Ω, Σ, P).

Powiemy, że X jest dyskretną zmienną losową, jeśli

(i) $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$X(\Omega) = \{x_n, \ n \in N_0 \subset \mathbb{N}\},$$

czyli zbiór wartości X jest przeliczalny

(ii) $\forall_{t \in \mathbb{R}} \ \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\} \in \Sigma$,

co pozwala zdefiniować funkcję

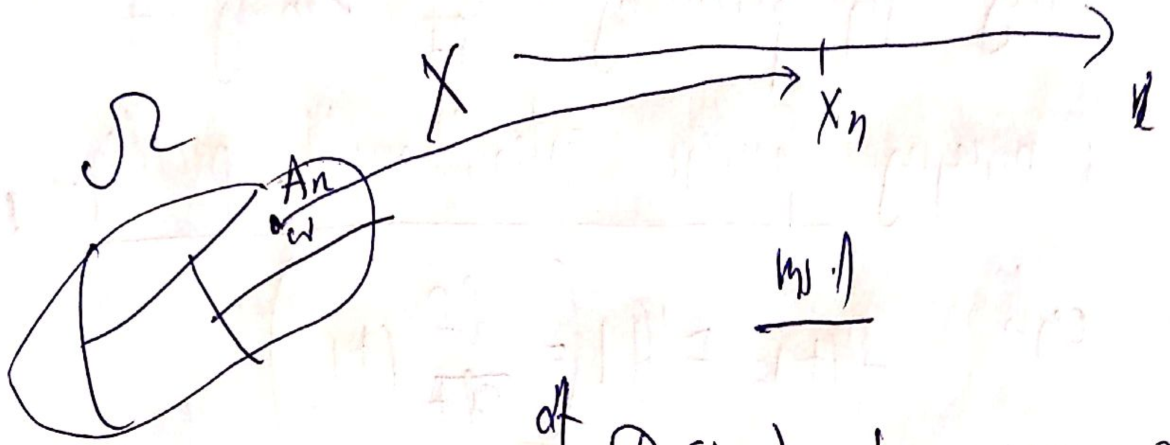
$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}) \in [0,1].$$

Przypuśćmy, że mamy: ZL, (Ω, Σ, P) i dyskretną zmienną losową X.

Z warunku (i) możemy zdefiniować zdarzenia

$$A_n \stackrel{df}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_n\}, \ n \in N_0 \subset \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $\{A_n\}_{n \in N_0}$ jest partycją Ω (j. m. 1,



Jeśli oznaczymy $p_n \overset{df}{=} P(A_n)$, to z powyższego

$$\sum_{n\in \mathbb{N}_0} p_n = 1.$$

Daje to nam odwzorowanie

$$d: X(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

$$d(x_n) = p_n, \quad \sum_{n\in \mathbb{N}_0} p_n = 1,$$

czyli pewien rozkład prawdopodobieństwa.

Dalej piszemy d_X i mówimy, że jest rozkładem X.

Tw 1. Każda dyskretna zm. losowa X ma swój rozkład d_X, gdzie

$$d_X(x_n) = p_n = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) = x_n\})$$

$\longrightarrow$ -

Co więcej, takie odwzorowanie

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) < t\})$$

jest identyczne z D.F.D. odpowiadającą d_X,

który oznaczamy F_X.

<u>Dlatego</u>

$$F_X(t) = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) < t\}), \text{ tzn.}$$

Pomiędzy o ZL z taką zm. losową X były

mówić, że <u>jest dyskretna</u>

<u>Uwagi</u>

1°. X pełni rolę <u>translacji</u>, bowiem

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow \underline{\underline{X(\omega)\in\mathbb{R}}}$$

2°. Dla $a\in\mathbb{R}$, weźmy zdarzenie

$A = \{\omega\in\Omega : X(\omega) \le a\}$. Zauważmy, że

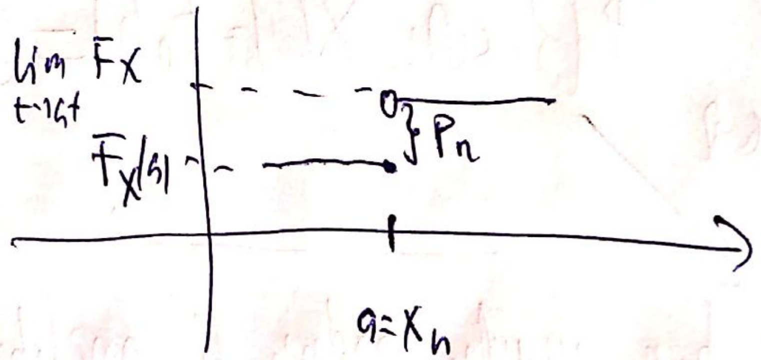
to <u>nie to samo</u>, co

Ponieważ

$$A = \{\omega\in\Omega : X(\omega)<a\} \cup \{\omega\in\Omega : X(\omega)=a\}$$

$$P(A) = P(\ \downarrow\ ) + P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)=a\})$$

$$= F_X(a) + \lim_{t\to a^+} F_X - F_X(a) = \lim_{t\to a^+} F_X ,$$



rys. 1.

czyli jeśli $a = x_n$ dla pewnego n, to w a F_X ma skok (nie ciągła).

Zatem dla takich a,

$$F_X(a) < \lim_{t\to a^+} F_X \text{ (p. rys. 2)}$$

3°. Niech $a<b$ i wtedy

$$\{\omega\in\Omega : a \leq X(\omega) < b\} =$$

Wtedy

$$P(\{\omega\in\Omega:\ a\leq X(\omega)<b\})=F_X(b)-F_X(a)$$

Zad 1. Udowodnić to!

Uw. d_X oraz F_X służą do wyznaczania prawdop. (związanych z ZL) zdarzeń $A\in\mathcal{Z}$.

Zachodzi tw. odwrotne.

Tw 2 (II tw. o rozkł. dyskretn.).

Dla każdego rozkł. pr. d (albo D.F.D F) istnieje co najmniej jedna ZL, jego MPK $(\Omega,\mathcal{Z},P)$ oraz odwzorowanie

$$X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R},\ \text{które}$$

jest dyskretną zm. losową oraz wtedy

$$d=d_X,\quad F=F_X$$

Przykłady dyskr. zm. losowych.

1°. X o rozkł. standardowym 2-punkt.

Wtedy d_X : $\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array}$, $p \in (0,1)$,

a więc dla (Ω, Σ, P) mamy

$$\Omega = \underbrace{\{\omega\in\Omega : X(\omega)=0\}}_{P(\ \ )=q} \cup \underbrace{\{\omega\in\Omega : X(\omega)=1\}}_{P(\ \ )=p}$$

2°. $X \in B(n,p)$, $n \geq 2$, $p \in (0,1)$

Tutaj: $\Omega = \underbrace{S_0 \,\dot\cup\, S_1 \cup \ldots \dot\cup\, S_n}_{\text{partycja}}$

$$p_k = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in S_k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

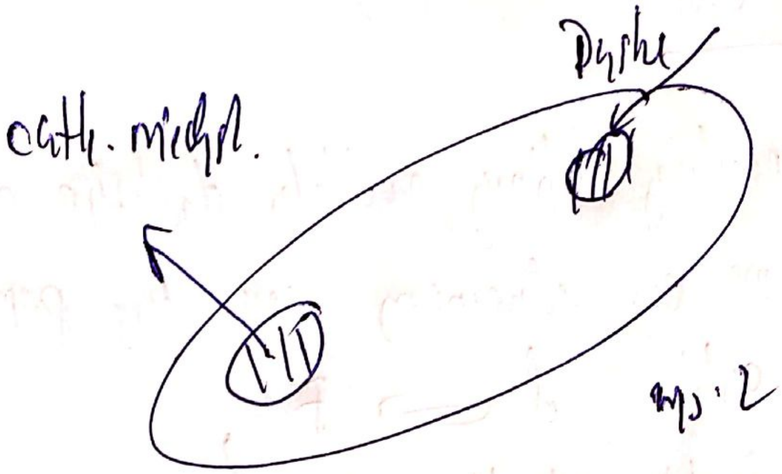
3°. $X \in P(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$\Omega = \dot{\bigcup_{k\geq 0}} A_k \quad P(A_k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

ZAD2. [RRJ], str 39–46

II Rozkłady ciągłe

Wyobraźmy sobie, że poniższy rysunek przedstawia wszystkie rozkłady prawd.



Wtedy rozkłady dyskretne, to zakreskowana "plamka". A co z resztą?
Opiszmy tylko rozkłady, które są (całkowicie) przeciwieństwem dyskretnych — można je nazwać całkowicie niedyskretnymi. W T.P. nazywamy je rozkładami ciągłymi (p. rys. 2).

Zaczniemy od uogólnienia D.F.D.

Def 1 (ogólna definicja dystrybuanty)

Powiemy, że F jest dystrybuantą zm. prawdop., jeśli

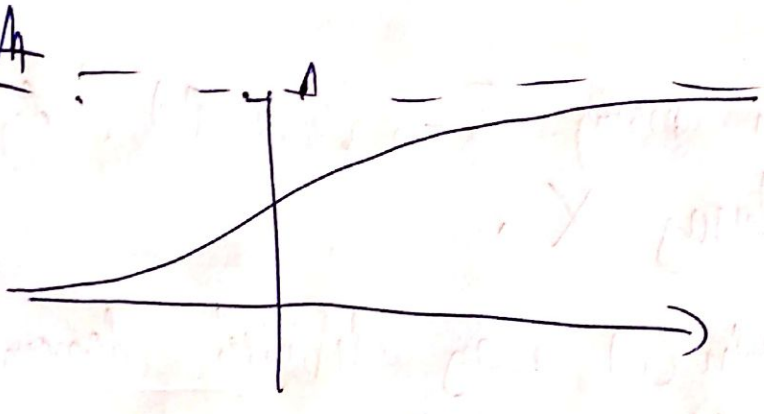
(i) $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

(ii) $\lim_{t\to-\infty} F = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F = 1$

(iii) F jest niemalejąca

(iv) F jest co najmniej lewo-stronnie ciągła.

Przykład



rys. 2.

Def 2 (dystrybuanta rozkładu ciągłego).

Powiemy, że F jest dystr. rozkł. ciągło, jeśli F jest „gładka”, czyli różniczkowalna poza zbiorem skończonym.

Wtedy jej pochodną $\frac{dF}{dt}$ oznacz. f i nazywamy <u>funkcją gęstości rozkł. prawdop.</u>,

czyli $\boxed{f(t) = F'(t) \left(= \frac{dF}{dt}(t) \right)}$.

<u>Tw 1 (I tw. o rozkł. ciągłym)</u>

Dla każdej F jak w def 2 istnieje:

(i) co najmniej jedno zjawisko losowe (ZL)

(ii) jego MPK, (Ω, Σ, P)

(iii) odwzorowanie $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \ \{\omega\in\Omega : X(\omega) < t\} \in \Sigma,$$

że:

(*) funkcje F oraz

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) < t\})$$

są identyczne, co oznacza

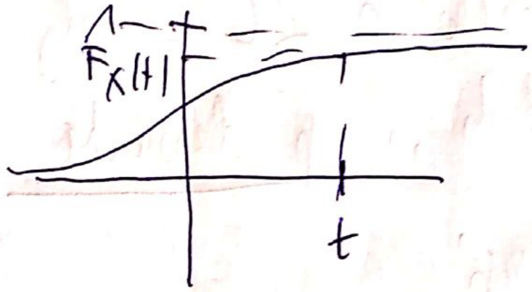
$F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}), \ t \in \mathbb{R}$

$\quad \| $

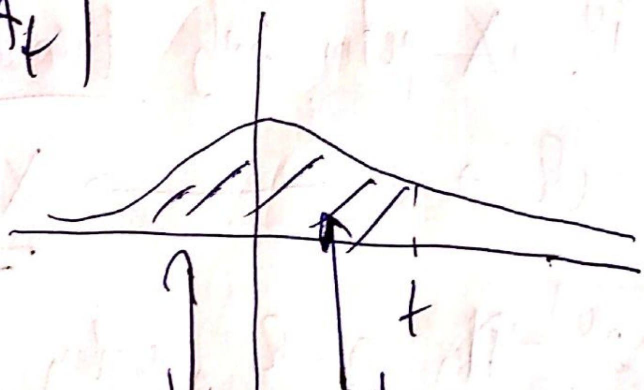
$F(t)$

$(**)$:

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} \ F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \underbrace{f_X(u)}_{f(u)}\, du \quad , \text{ zatem}$$



$P(A_t)$



$A_t = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}$

„pole" $= \int_{-\infty}^{t} f_X(u)$

(∗∗∗)

$\forall t_0 \in \mathbb{R}$

$$P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) \le t_0\}) = \lim_{t \to t_0} F_X(t) = F_X(t_0),$$

bo różniczkowalna $\Longrightarrow$ ciągła (!).

Stąd

$$\forall_{t_0 \in \mathbb{R}} \; P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) = t_0\}) = 0 \; (!!!)$$

Właśnie z tego powodu mówimy o rozkładzie ciągłym przy całkowitej ciągłości.

(∗∗∗∗) $\forall a < b$

$$P(\{\omega\in\Omega : a \le X(\omega) < b\}) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(s)\,ds$$

(@vvvv)

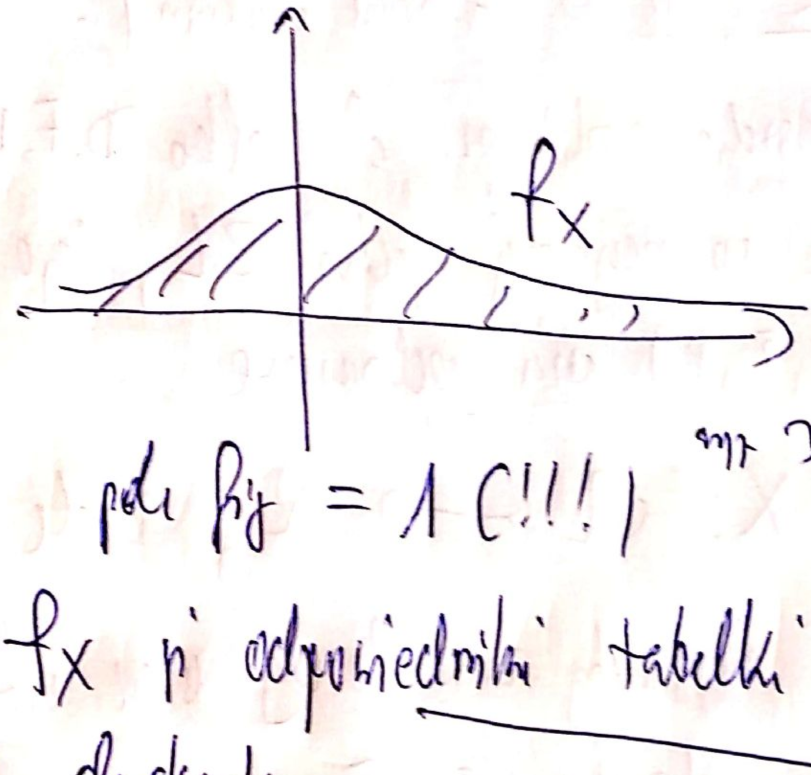
Z (@v)

$\forall\, t \in \mathbb{R}$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du$$

$$\Big\downarrow t \to +\infty \qquad \Big\downarrow$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du$$



pole figury = 1 (!!!) [illegible]

Zatem f_X jest odpowiednikiem tabelki dla rozkł. dyskretnych.

Tw2 (II tw. o rozkł. ciągłym)

Niech f będzie funkcją ciągłą, taką, że

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Jeśli $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ istnieje i $= 1$, to

(i) istnieje co najmn. jedna ZL

(ii) MPK (Ω, Σ, P)

(iii) zm. losowa X o rozkł. ciągłym (F_X, f_X),

że:

$$f_X = f$$