Kurs: PSK Inf 3

Forma: Wykład

Tryb: On-line

W. 6.

<u>Temat</u>. Przegląd wybranych rozkładów ciągłych oraz ich własności

<u>Wprowadzenie</u>

Niech X oznacza ZMIENNĄ LOSOWĄ. Jak wiemy, istnieje wtedy co najmniej jedno zjawisko losowe (ZL) oraz jego MPK (Ω, Σ, P), że

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow X(\omega) \in \mathbb{R} \quad \text{oraz}$$

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} \ \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\} \in \Sigma .$$

Dojdę do funkcji:

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}) \in [0,1],$$

którą nazywamy dystrybuantą X i jest jednym z dwóch parametrów rozkładu prawdopodobieństwa X.

Poznaliśmy dwa typy F_X: dyskretny (reprezent. przez „funkcję skokową") i ciągły.

W tym drugim przypadku F_X jest różniczkowalna, wtedy jej pochodna F_X' jest oznaczana przez f_X i nazywana funkcją gęstości X.

Wtedy:

(i) $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du, \quad t \in \mathbb{R}$

(ii) $\forall\, a < b$

$$P(\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) < b\}) = \int_a^b f_X(u)\,du = F_X(b) - F_X(a)$$

(iii) $\forall_{x_0 \in \mathbb{R}} \; P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_0\}) = 0$

(iv) Każda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki $\alpha)$ $f \geq 0$

$\beta)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$

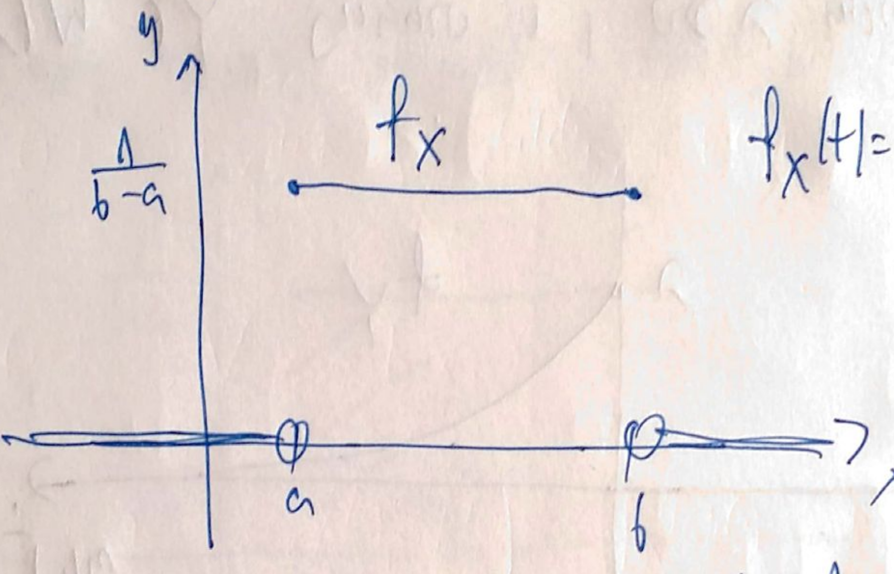
jest f. gęstości p. rozkładu prawd. typu ciągłego.

3 ważne przykłady rozkładów ciągłych i ich własności.

7.1 Rozkład jednostajny (zwany też „prostokątnym").

$X \in \mathcal{J}([a,b])$, $a<b$ oznacza, że

f_X ma postać jak na rys. 1



$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a,b] \\ 0, & t \notin [a,b] \end{cases}$$

rys. 1

Uwaga 1. Funkcja z rys. 1 jest f. gęstości rozkł. prawd. bowiem:

(i) $f_X(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du$ – pole figury ograniczonej wykresem f_X i osią OX jest równe 1 (prostokąt o wymiarach $(b-a) \times \frac{1}{b-a}$)

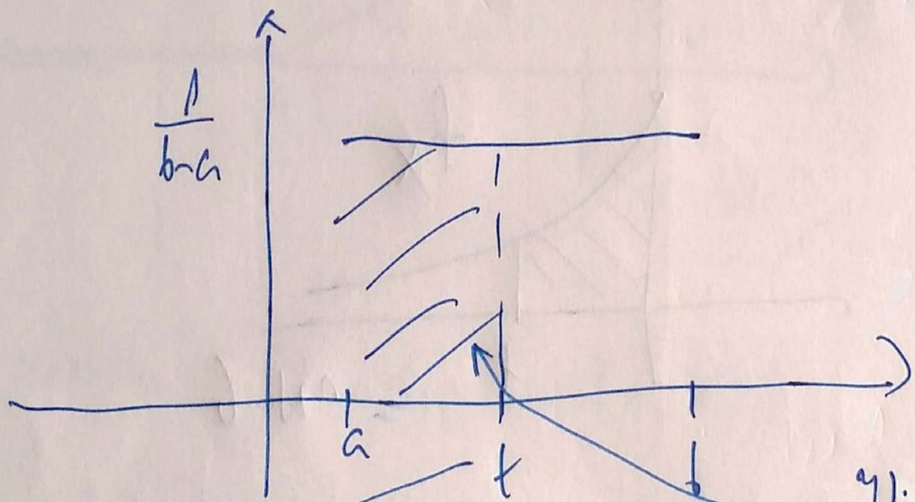
Uwaga 2. Wyznaczmy F_X:

$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du$, więc z def f_X mamy:

(i) $F_X(t) = 0$ dla $t \le a$

(ii) $F_X(t) = 1$ dla $t \ge b$

Zostało więc rozważyć przypadek $t \in (a, b)$ (rys. 2)



rys. 2.

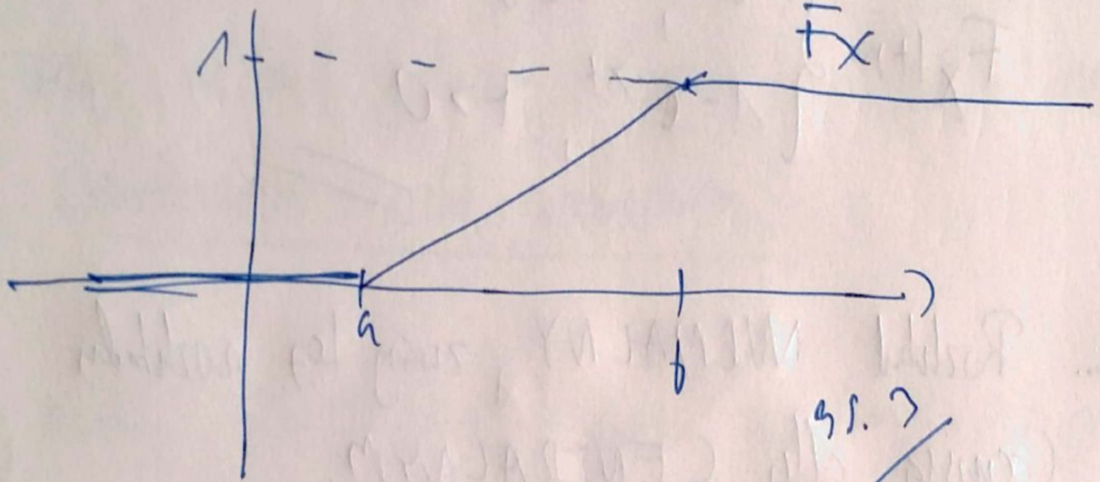
Wtedy $F_X(t)$ jest równe pola zakreślonej figury,

zatem

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} f_X(u)\,du}_{=0} + \int_{a}^{t} f_X(u)\,du =$$

$$\int_a^t \frac{1}{b-a}\,du = \frac{1}{b-a}\int_a^t du = \frac{t-a}{b-a},$$ co daje

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \le a \\ \frac{t-a}{b-a} & t \in (a,b) \\ 1 & t \ge b \end{cases}$$



rys. 7

W szczególności $\forall\, [\alpha,\beta] \cap [a,b]$

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [\alpha,\beta]\}) = 0,$$

co oznacza, że $\overset{\text{rozkład}}{\vee}$ $X \in P([a,b])$ jest „skoncentrowany" na $[a,b]$.

Fakt (Zasada skalowania)

$$X \in \mathcal{U}([a,b]) \iff Y \overset{df}{=} \frac{X-b}{b-a} \in \mathcal{U}([0,1])$$

Dowód.

Zadanie.

Dalej rozkład jednostajny skończony na $[0,1]$ nazywamy standardowym rozkł. jednostajnym.

Weźmy $X \in \mathcal{U}([0,1])$ oraz ustalmy $\lambda > 0$.

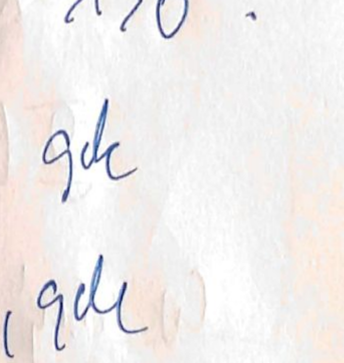
Definiujemy nową zmienną losową Y, gdzie

$$Y \overset{df}{=} -\frac{1}{\lambda} \ln(1-X), \text{ gdzie}$$

„ln” oznacza logarytm naturalny.

Wyznaczmy rozkład zm. losowej Y.

Wiadomo, że $\mathbb{R}_+ \ni x \longmapsto \ln x \in \mathbb{R}$



Ponieważ $X \in \mathcal{U}([0,1])$, oznacza, że

$X(\omega) \in (0,1)$ z prawdop. 1.

Dlatego $1 - X(\omega) \in (0,1)$ z prawd. 1, skąd

$\ln(1 - X(\omega)) < 0$ i w efekcie

$Y(\omega) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X(\omega)) > 0$ (bo $\lambda > 0$!)

Oznacza to, że Y jest skoncentrowana na $\mathbb{R}_+$,

czyli

$$\boxed{F_Y(t) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) < t\}) = 0 \quad \text{dla } t \leq 0}$$

Dlatego możemy założyć, że dalej $t > 0$.

Dla takich t dostaniemy:

$F_Y(t) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) < t\}) =$

$= P(\{\omega\in\Omega: -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X(\omega))<t\}) =$

$P(\{\omega\in\Omega: \ln(1-X(\omega)) > -\lambda t\}) =$

$= P(\{\omega\in\Omega: 1-X(\omega) > e^{-\lambda t}\}) =$

$P(\{\omega\in\Omega: X(\omega) < 1-e^{-\lambda t}\})$.

Mamy więc:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ F_X(1-e^{-\lambda t}), & t > 0 \end{cases}$$

Znajdź funkcję gęstości f_Y wektora zm. l. Y.

Z postaci F_Y i tw. o różniczkowaniu funkcji złożonej oraz założenia, że X ma rozkład ciągły wynika, że Y też ma rozkład ciągły oraz

$$f_Y(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{d}{dt} F_X(1-e^{-\lambda t}), & t > 0 \end{cases},$$

czyli dla $t>0$ (r. różn. f. złożonej!)

$$f_Y(t) = F_X'(1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda t})' =$$

$$= f_X(1-e^{-\lambda t}) \cdot \lambda e^{-\lambda t}.$$

Mamy zatem

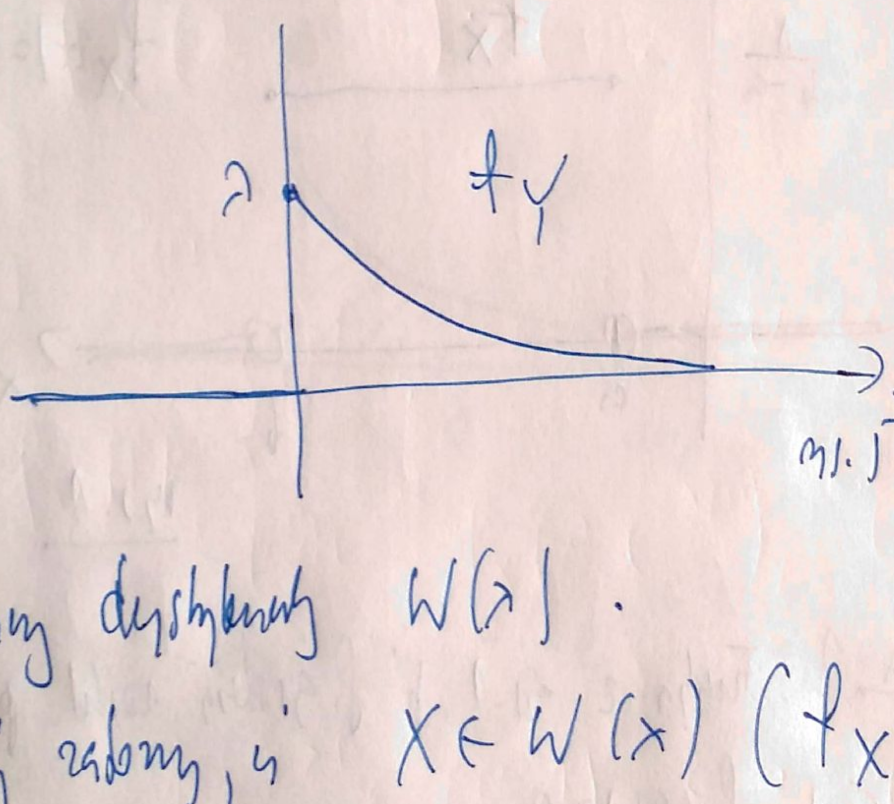
$$f_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} f_X(1-e^{-\lambda t}), & t > 0. \end{cases}$$

Ale:
$$1-e^{-\lambda t} \in (0,1) \iff t>0,$$

co z def rozkładu $\mathcal{J}([0,1])$ oznacza, że

$$f_Y(t) := \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases}$$

Dalej rozkład zadany funkcją gęstości jak wyżej (rys. 5) nazywamy rozkładem WYKŁADNICZYM z parametrem $\lambda > 0$, i oznaczamy $Y \in W(\lambda)$.



rys. 5

Wyznaczymy dystrybuantę $W(\lambda)$.

Dalej zakładamy, że $X \in W(\lambda)$ $(f_X = f_Y)$

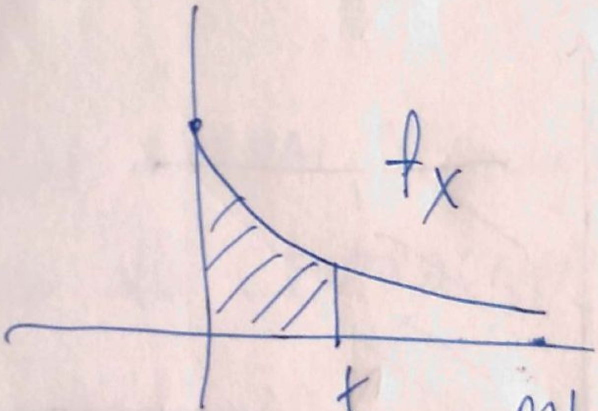
Z powyższego wynika, że

z prawd. 1 $\quad X(\omega) > 0$ (skoncentrowany na $\mathbb{R}_+$)

Tedy $F_X(t) = 0$, $t \leq 0$.

Pro $t > 0$ máme (obr. 6)

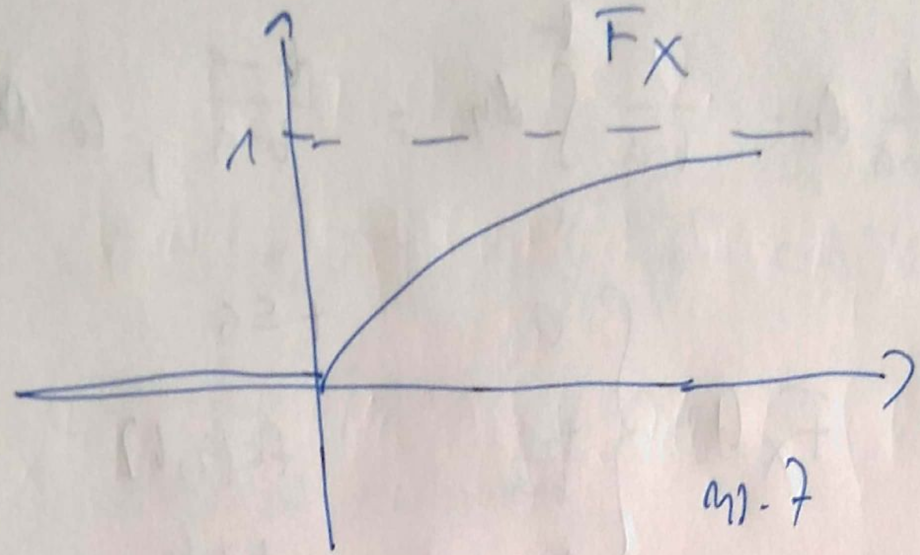
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f_X(u)\,du}_{=0} + \int_{0}^{t} f_X(u)\,du =$$



obr. 6

$$= \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda u}\,du = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u}\right|_{0}^{t} = 1 - e^{-\lambda t},$$

co máme předvídání jak na obr. 7.



rys. 7

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$

P3. Rozkład NORMALNY, zwany też rozkładem Gaussa albo CENTRALNYM.

$X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, gdzie $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

(parametry tego rozkładu).

Wtedy f gęstości ma postać

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Uwaga 1

$$X \in N(m, \sigma^2) \iff \frac{X-m}{\sigma} \in N(0,1)$$

(zasada STANDARYZACJI)

zad. na ćwiczenia!

Wtedy rozkład z parametrami: $m=0,\ \sigma=1$

nazywamy standardowym rozkł. normalnym,

a jego dystr. oznaczamy przez Φ,

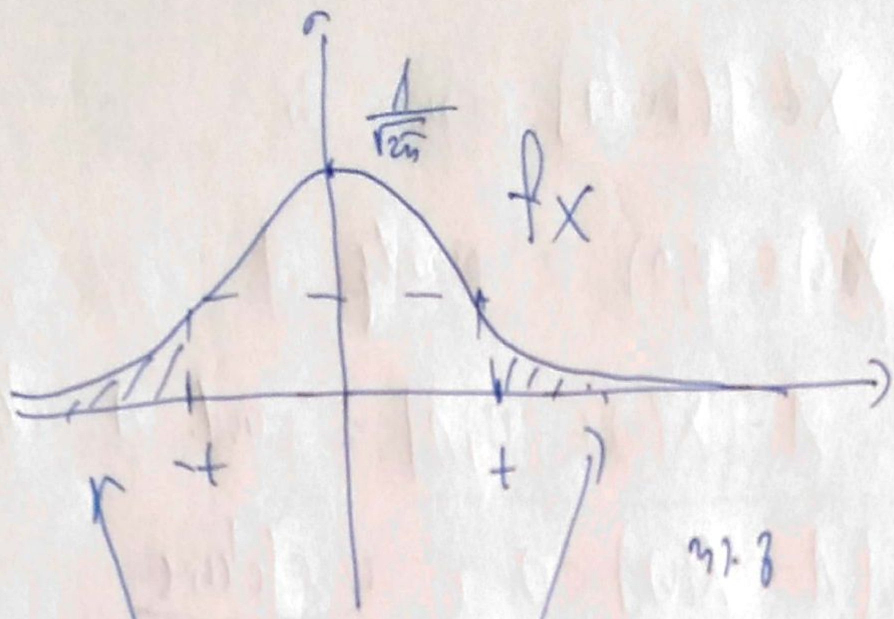
czyli

$X \in N(0,1)$, to

$$\Phi(t) = (F_X(t)) = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)<t\}).$$

Co więcej, $f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}$

(wykład — str. 8)



rys. 3

Krzywą z rys. 3 nazywamy „krzywą Gaussa" albo „krzywą dzwonową".

Podstawowe własności $X \in N(0,1)$

1°. f_X jest symetryczna (f. parzysta!)

2°. Zakreskowane figury mają jednakowe pola (symetria), dlatego

$$\Phi(-t) = P(\{\omega\in\Omega: X(\omega) < -t\}) =$$

$$P(\{\omega\in\Omega: X(\omega) \geq t\}) = 1 - \Phi(t),$$

co oznacza, że wartości Φ dla argumentów ujemnych się określa przez argumenty dodatnie

3°. Można udowodnić, że

$$P(\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)\geq 3\})\leq 0.05,$$

co oznacza, że cała istotna informacja objęta tym nośnikiem danej sytuacji, kiedy

$$X(\omega)\in[-3,3], \text{ a z symetrii}$$

$$X(\omega)\in[0,3].$$

4°. Rozkład $N(0,1)$ (Φ) jest stablicowany.

Będą ćwiczenia na ten temat!