PSK - materiały do zajęć na 26.03.2020

Temat Wektor losowy i jego własności.

Obserwujemy zjawisko losowe (Ω, Σ, P). Do tej pory interesował nas tylko jeden aspekt tej obserwacji, który był opisywany zmienną losową X.
Teraz załóżmy, że tych aspektów będzie $n \geq 2$, czyli będziemy mieli n zmiennych losowych:

$X_1, X_2 \ldots X_n$, każda z nich określona na Ω, a więc interpretująca obserwację ZL.
Będziemy rozważali efekt agregacji tych aspektów w postaci obiektu $(X_1 \ldots X_n)$, który nazwiemy wektorem losowym.

Zatem wynikiem tej agregacji jest przyporządkowanie:

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow (X_1, \ldots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), \ldots X_n(\omega)),$$

które obserwacji $\omega \in \Omega$ przyporządkowuje ciąg liczb $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, który też nazywamy wektorem.

W tym sensie możemy powiedzieć, że wektor losowy jest: uogólnieniem (zwykłego) wektora, ale i też (pojedynczej) zmiennej losowej.

~

Opisem probabilistycznym wektora losowego jest jego <u>rozkład</u>, który nazywamy <u>rozkładem łącznym</u> w. l.

Jest nim funkcja n-argumentowa $F_{(X_1,\dots,X_n)}$

$$\mathbb{R}^n \ni (t_1,t_2,\dots,t_n) \longrightarrow F_{(X_1,X_2,\dots,X_n)}(t_1,t_2,\dots,t_n) =$$

$$= P(\{\omega\in\Omega : X_1(\omega)<t_1 \wedge X_2(\omega)<t_2 \wedge \dots \wedge X_n(\omega)<t_n\});$$

zatem uogólnienie (zwykłej) dystrybuanty rozkładu.

Wyjaśnimy znaczenie tej funkcji ograniczając przypadek do $n=2$, czyli wektora postaci (X,Y) zaczynając od przypadku dyskretnego.

<u>I Przypadek dyskretny</u> (skończony)

Niech X,Y opisują wyniki obserwacji ZL (Ω,Σ,P) następująco:

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}, \quad n, m \geq 2.$$

Wtedy łączny wynik obserwacji dany wektorem losowym (X,Y) ma wartości

$$(X,Y)(\Omega) = \{(x_i, y_j),\ i=1,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m\}.$$

Formalnie mamy funkcję

$$F_{(X,Y)}(t,s) = P(\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)<t \wedge Y(\omega)<s\}),$$

którą w omawianej sytuacji można przedstawić inaczej.

W tym celu weźmy partycję Ω:

$$C_{ij} = \{\omega\in\Omega:\ (X(\omega), Y(\omega)) = (x_i; y_j)\},$$

$i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m.$

Oznaczmy $p_{ij} = P(C_{ij})$ oraz weźmy macierz $\mathbb{P}$ typu $n\times m$, gdzie $\mathbb{P} = [p_{ij}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ - & - & - & - \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nm} \end{bmatrix}$.

Zauważmy:

1) $p_{ij}\in(0,1)$ dla każdego i,j

2) ponieważ $\{C_{ij}\}$ jest partycją Ω, suma wszystkich p_{ij} jest równa 1, czyli $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$

3) oznaczmy sumę wszystkich ~~elementów~~ wyrazów i-tego wiersza macierzy $\mathbb{P}$ przez $p_{i\cdot}$. Analogicznie, sumę wszystkich wyrazów j-tej kolumny macierzy $\mathbb{P}$ przez $p_{\cdot j}$

Wtedy ciągi:

$(p_{1\cdot}, p_{2\cdot}, \ldots, p_{n\cdot})$ oraz $(p_{\cdot 1}, p_{\cdot 2}, \ldots, p_{\cdot m})$

określają rozkłady składowych X i Y wektora (X,Y), czyli:

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x_i\}) = p_{i\cdot}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : Y(\omega)=y_j\}) = p_{\cdot j}, \quad j=1,\ldots,m.$$

Zatem macierz Π reprezentująca rozkład (łączny) wektora losowego (X,Y), tak jak alternatywna postać funkcji $F_{(X,Y)}$ wyznacza rozkłady X i Y. Z tego powodu nazywamy je rozkładami brzegowymi.

Uwaga. Ale nie na odwrót, tzn. znajomość rozkładów brzegowych nie daje rozkładu łącznego.

W jednym tylko przypadku TAK JEST:

kiedy X i Y są stochastycznie niezależne.

Wtedy $\underbrace{\forall_{i,j} \; p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}}$

4) I na odwrót, jeśli damy pewną macierz

$A = [a_{ij}]_{n \times m}$ o własnościach 1-3, to

a) istnieje ZL (Ω, Σ, P)

b) zmienne losowe X, Y

c) wektor losowy (X, Y), że A opisuje jego rozkład.

Przykład 1.

Niech $X(\Omega) = \{-1, 1\}$, $Y(\Omega) = \{0, 2\}$

Biorę (X, Y) i zakładam, że $\mathbb{P}$ jest jego rozkładem łącznym. Mamy następującą sytuację:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ -1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ p_{1\cdot} = 0{,}4 \\ p_{2\cdot} = 0{,}6 \end{array}$$

$$p_{\cdot 1} = 0{,}6 \quad p_{\cdot 2} = 0{,}4$$

Zatem $X: \begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}$; $Y: \begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 0{,}6 & 0{,}4 \end{array}$

Sprawdzić, czy X, Y są stochast. niezależne.

<u>Przykład 2</u>.

Dobrać tak wartości liczb a, b, c, aby macierz A była rozkładem pewnego wektora losowego.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć rozkłady brzegowe. Czy rozkłady brzegowe są stochastycznie niezależne.

<u>Wskazówka</u>.

Zauważ, że nie potrzebujemy znać zbiorów $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$. Dlatego trzeba przyjąć, że $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3\}$

$Y(\Omega) = \{y_1, y_2, y_3\}$,

co zapisujemy jak w P1, czyli

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 \end{bmatrix} \end{array}$$

II Przypadek ciągły.

Niech X, Y mają rozkłady ciągłe z funkcjami gęstości f_X oraz f_Y, czyli

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du, \quad F_Y(s)=\int_{-\infty}^{s} f_Y(s)\,ds.$$

Wtedy rozkład (ciągły) wektora (X,Y) określony jest następująco

$$F_{(X,Y)}(t,s)=\int_{-\infty}^{s}\left(\int_{-\infty}^{t} f_{(X,Y)}(u,v)\,du\right)dv,$$

gdzie funkcja $f_{(X,Y)}$ jest odpowiednikiem macierzy P z przypadku rozkładu dyskretnego i nazywa się f. gęstości rozkładu (X,Y).

Uwaga. Na ogół

$$f_{(X,Y)} \neq f_X \cdot f_Y .$$

Jeśli równość zachodzi, to X, Y są stochastycznie niezależne.

Ograniczymy się tylko do dwóch przykładów

P.1. Niech $f(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & (t,s) \in [a,b]\times[c,d] \\ 0, & \text{dla pozostałych}. \end{cases}$

Ponieważ $f(t,s) \geq 0$ oraz $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)\,ds \right) dt = 1$,

więc f jest funkcją gęstości pewnego wektora (X,Y) i czyli

$f = f_{(X,Y)}$. Biorąc

f_X dla $X \in J([a,b])$, f_Y dla $Y \in J([c,d])$

$$f_X \cdot f_Y = f_{(X,Y)}$$

P.2. (dwuwymiarowy rozkład normalny)

(X,Y) ma dwuwymiarowy rozkł. normalny, gdy

$$f_{(X,Y)}(t,s) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left(\frac{(t-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(t-m_1)(s-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(s-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)$$

dla pewnych $m_1, m_2 \in \mathbb{R}^2$

$\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $|\varrho| < 1$

Dalej wyjaśnimy znaczenie liczby ϱ !

Temat. Kowariancja i współczynnik korelacji.

Wiemy, że na ogół rozkład łączny nie jest wyznaczony przez rozkłady brzegowe. Mamy tylko

rozkład łączny $\Longrightarrow$ rozkłady brzegowe.

Powodem tego jest brak stochastycznej niezależności. Potrzebna jest miara stopnia zależności X od Y (ograniczymy się tylko do wektora (X,Y)!).

I krok konstrukcji tej miary: pojęcie kowariancji.

Niech dany będzie wektor (X,Y), gdzie X,Y mają co najmniej 2-gie momenty (a więc i wariancje).

Przez kowariancję (X,Y) rozumiemy

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\big((X-EX)(Y-EY)\big),$$

Uwagi 1°. Jeśli $X=Y$, to

$$\mathrm{cov}(X,X) = \mathrm{var}(X)$$

2°. Bezpośrednim rachunkiem (proszę go wykonać) można sprawdzić, iż

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY).$$

3°. Jeśli X,Y są stochastycznie niezależne, to

$$E(XY) = (EX)(EY),$$ zatem z 2°.

$$\text{stochastyczna niezależność } X,Y \implies \mathrm{cov}(X,Y) = 0$$

4°. Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić (zrobić to), iż

$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y).$$

Zatem:

$$X,Y \text{ st. niezależne} \implies \mathrm{cov}(X,Y) = 0 \implies \mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$$

5°. Z tego, iż $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ <u>nie wynika</u> stochastyczna niezależność.

Dlatego $\mathrm{cov}(X,Y)$ uważamy jako <u>miarę stochastycznej zależności</u>!

II etap konstrukcji

Niech dalej X, Y dodatkowo $\neq$ const.

Wtedy $\mathrm{var}X > 0$, $\mathrm{var}Y > 0$.

Definiujemy

$$\rho_{(X,Y)} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}X} \cdot \sqrt{\mathrm{var}Y}}$$

Jest to tzw. współczynnik KORELACJI współrzędnych wektora losowego (X,Y).

Własności $\rho_{(X,Y)}$:

a) $X = Y$, to $\rho_{(X,X)} = 1$

$X = -Y$, to $\rho_{(X,-X)} = -1$

b) ogólnie $\rho_{(X,Y)} \in [-1, 1]$.

c) dalej bierzemy $|\rho_{(X,Y)}| \in [0, 1]$.

Wtedy $|\rho_{(X,Y)}| = 1$ (oznacza najw. możliwą wartość)

$\Updownarrow$

$Y = aX + b$ dla p. $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{R}$

Czyli powiązanie największej zależności (stochastycznej) X od Y (Y od X) jest związek liniowy

$$Y = aX + b$$

d) $|R(X,Y)| = 0 \equiv \operatorname{cov}(X,Y) = 0$

$$\equiv \operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$$

$$\downarrow$$

na rozproszenie pomiaru łącznego wpływa tylko rozproszenie jego składników. Brak efektu „zaszumienia"

<u>Przykłady</u> • Wektor (X,Y) ma rozkład taki

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \text{gdzie } X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0,1,2\}$$

Z zadania

X:	0	1	2
	1/4	1/2	1/4

Y:	0	1	2
	1/4	1/2	1/4

czyli $d(X) = d(Y)$. Zatem X i Y <u>nie są</u> stochastycznie niezależne.

Odredimo $cov(X,Y)$ i $\rho(X,Y)$.

$EX = EY = 1$.

Dalje $(XY)(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$ i zakon XY, je postavi

$$XY : \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Dakle $E(XY) = 1$.

Stoga $cov(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY) = 0$

ovaj $|\rho(X,Y)| = 0$.

Zato X i Y ne su linearno zavisne,

mimo, i $d(X) = d(Y)$!

Temat. Warunkowa wartość oczekiwana.

Wyjaśnimy to pojęcie najpierw dla p. dyskretnego.

Niech (X,Y) – dyskretny (skokowy) wektor losowy.

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

$\mathbb{P} = [p_{ij}]_{n\times m}$ – rozkład tego

$$E(X \mid Y=y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x_i \mid Y(\omega)=y\})$$

$\downarrow$

warunkowa w. oczekiwana X
pod warunkiem, iż zaszło
zdarzenie $\{\omega\in\Omega : Y(\omega)=y\}$,
$y \in Y(\Omega)$

Z def. modelu warunkowego mamy:

$$E(X \mid Y=y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i P(\{\omega\in\Omega : (X(\omega),Y(\omega))=(x_i,y)\})}{P(\{\omega\in\Omega : Y(\omega)=y\})}$$

Jeśli $y\in Y(\Omega)$, czyli $y=y_j$ dla pewnego $1\le j\le m$, to

$$E(X \mid Y=y_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

Zauważmy, że

$$w_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \in [0,1] \text{ oraz}$$

$$\forall_j \quad \sum_{i=1}^{n} w_{ij} = \frac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}} = 1 .$$

Dlatego

$E(X \mid Y = y_j)$ jest średnią <u>ważoną</u>

wartości $X(\Omega)$, gdzie wagi (dla y_j)

są postaci w_{ij}.

<u>Przykład</u>. Wiadomo, że $X(\Omega) = \{1,2,3\}$, $Y(\Omega) = \{-1,1\}$

i rozkład łączny ma postać

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 11/50 & 1/10 \\ 8/50 & 13/50 \\ 3/50 & 1/5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Zatem

$$X: \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline \frac{16}{50} & \frac{21}{50} & \frac{13}{50} \end{array} \qquad Y: \begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline \frac{22}{50} & \frac{28}{50} \end{array}$$

Wyznaczmy np. $E(X \mid Y = -1)$

~~[illegible]~~

Zgodnie z definicją mamy:

$$E(X \mid Y=1) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} =$$

$$= x_1 \frac{p_{11}}{p_{\cdot 1}} + x_2 \frac{p_{21}}{p_{\cdot 1}} + x_3 \frac{p_{31}}{p_{\cdot 1}}$$

$$= 1 \cdot \frac{11}{\cancel{50}} \frac{\cancel{50}}{22} + 2 \frac{8}{\cancel{50}} \cdot \frac{\cancel{50}}{22} + 3 \cdot \frac{3}{\cancel{50}} \frac{\cancel{50}}{22}$$

$$= 1/2 + \frac{16}{22} + \frac{9}{22} = \frac{36}{22}$$

Przypadek ciągły.

$$E(X \mid Y=y) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x f(x,y)\,dx}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx}$$