Problem — gęstość N(0,1)

Metodą symulacji wykazać, że

$$(*) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 1$$

Wskazówki i uwagi

1°. Funkcja $e^{-x^2/2}$ nie ma pierwotnej w zbiorze f. elementarnych. Stąd (*) nie da się obliczyć m. bezpośr. Dlatego potrzebne są inne procedury, np. symulacja.

2°. (*) oznacza, że ciąg

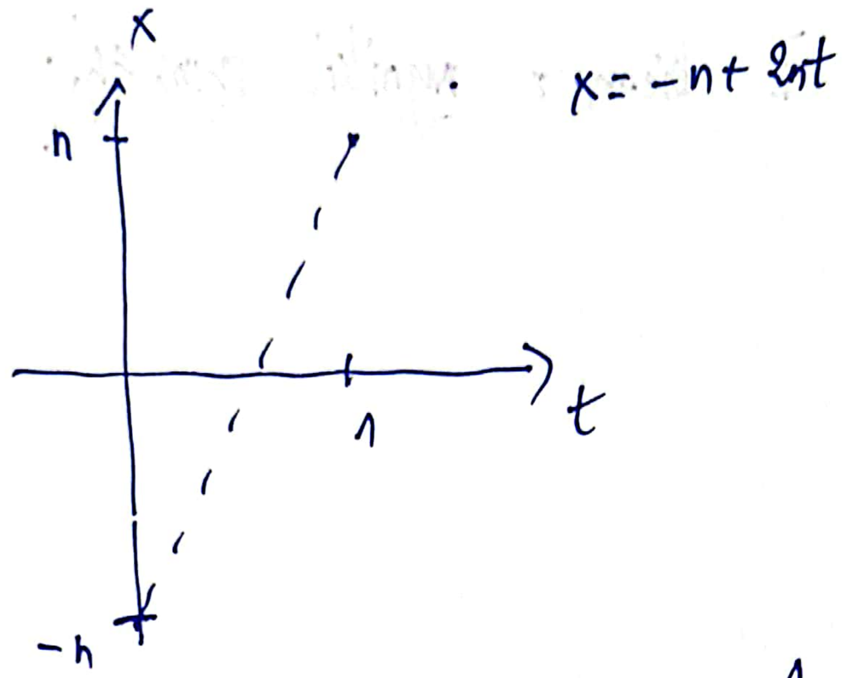
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{-x^2/2}\, dx \longrightarrow 1,$$

(**) czyli $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} |1-a_n| < \varepsilon$

3°. Symulacja a_n dla $n \geq 3$.

(i) Zamiana zmiennej, aby całka po p. $[0,1]$

Zeskanowane w CamScanner



$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-(-n+2nt)^2} \cdot 2n \, dt = \frac{2n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-(n(2t-1))^2} dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n \int_0^1 e^{-n^2(2t-1)^2} dt \quad , \; n \geq 3$$

(ii) generuj $L \geq 100$ $L(P|L$

(iii) Dla $\varepsilon = 10^{-2}$ w (**) wyznacz n_0, że

$$\left| 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n}{L} \sum_{j=1}^{L} e^{-n^2(2t_j-1)^2} \right| < 10^{-2}$$

(iv) Dla wyznaczonego n_0 oblicz $a_0 =$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_0}{L} \sum_{j=1}^{L} e^{-n_0^2(2t_j-1)^2} \, ,$$

Zeskanowane w CamScanner

gdy π bierzemy z wyników symulacji:

Zeskanowane w CamScanner