Konspekt do wykładu z PSK zaplanowanego na 12.03.2020.

Temat 1: Przegląd wybranych rozkładów ciągłych.

Niech X oznacza zmienną losową. Jak wiemy, istnieje wtedy co najmniej jedno zjawisko losowe (ZL) oraz jej MPK (Ω, Σ, P), że

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}$$

oraz $\forall_{t \in \mathbb{R}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\} \in \Sigma$.

Daje to nam funkcję

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow F_X(t) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}) \in [0,1],$$

która (jak wiemy) nazywa się dystrybuantą X i jest jednym z parametrów rozkładu prawdopodobieństwa X.

Jak pamiętamy, w przypadku kiedy X jest typu dyskretnego, F_X jest tzw. „funkcją schodkową".

X ma rozkład ciągły oznacza, iż funkcja F_X jest różniczkowalna (a więc też ciągła, czyli na pewno nie jest typu „schodkowego").

Wtedy jej pochodną F_X' oznaczamy f_X i nazywamy funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa.

Oznacza to, że:

(i) $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du, \quad t \in \mathbb{R}$,

(ii) dla dowolnych $a < b$

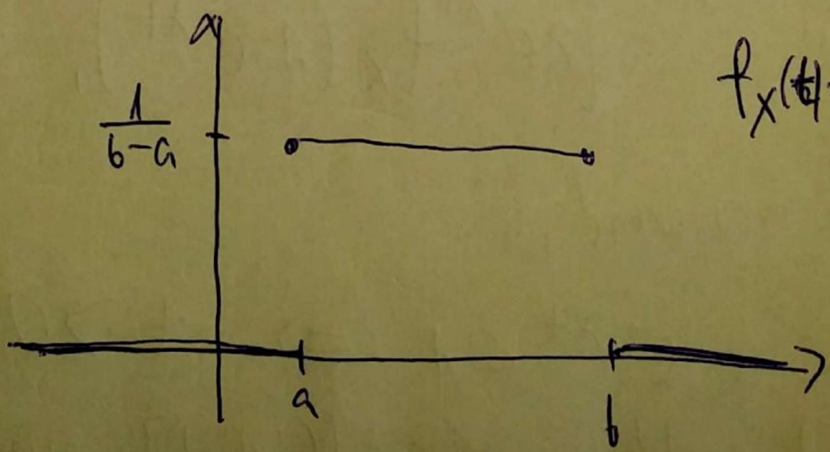
$$P(\{\omega \in \Omega : a \le X(\omega) < b\}) = \int_a^b f_X(u)\,du = F_X(b) - F_X(a)$$

(iii) $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_0\}) = 0$, dla $x_0 \in \mathbb{R}$.

Podamy teraz przykłady 3 podstawowych rozkładów ciągłych.

7.1. Rozkład jednostajny (zwany też „prostokątnym").

$X \in U([a,b])$, gdzie $a < b$ oznacza, że f_X ma postać jak na rys. 1



$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a,b] \\ 0, & t \notin [a,b]. \end{cases}$$

Uwaga 1. Funkcja z rys. 1 jest funkcją gęstości rozkładu prawdop., bowiem

(i) $f_X(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X$ – pole figury ograniczonej wykresem f_X i osią OX jest równe 1 (u nas jest to prostokąt o bokach dł. $\frac{1}{b-a}$ i $(b-a)$.)

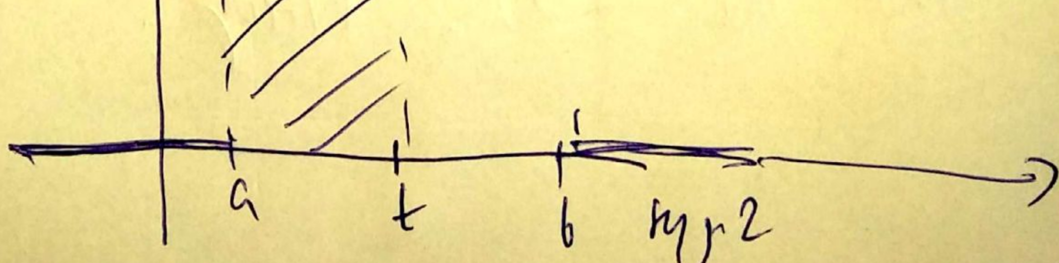
Uwaga 2. Wyznaczmy F_X:

Ponieważ $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du$, więc z def. f_X wynika, że:

(i) $F_X(t) = 0$ dla $t \leq a$

(ii) $F_X(t) = 1$ dla $t \geq b$.

Dlatego wystarczy rozważyć $t \in (a, b)$ (jak na rys. 2)



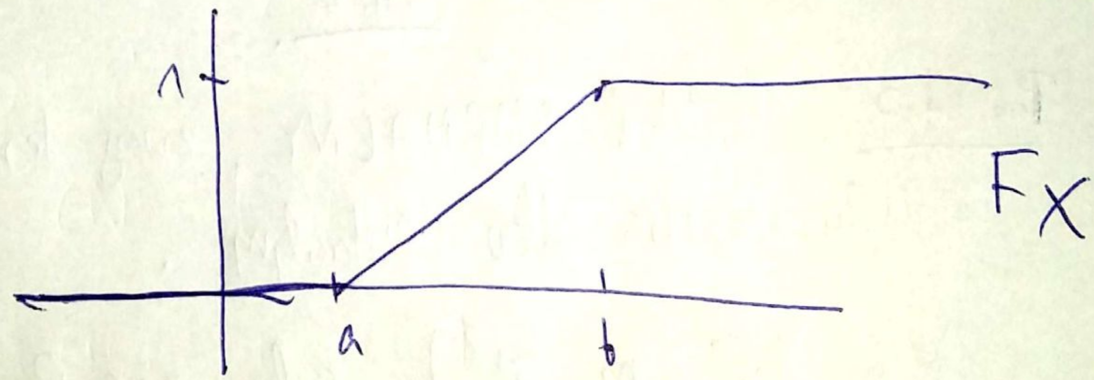
rys. 2

Wtedy $F_X(t)$ jest miarą pola figury zakreskowanej na rys 2, zatem

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du = \int_{a}^{t} f_X(u)\,du =$$

$$= \int_{a}^{t} \frac{1}{b-a}\,du = \frac{t-a}{b-a}, \text{ to daje}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \le a \\ \frac{t-a}{b-a}, & t \in (a,b) \\ 1 & t \geq b \end{cases}$$



rys. 3.

Z tego powodu mówimy, że X jest „skoncentrowana" na przedziale $[a,b]$.

Wykonajmy jeszcze jedno ćwiczenie, po to aby pokazać, że $X \in \mathcal{J}([a,b))$ jest ważny.

Wcześniej jednak zadanie dla Państwa:

<u>Zad 1</u>. Uzasadnić, że

$$X \in \mathcal{J}([a,b)) \iff Y = \frac{X-b}{b-a} \in \mathcal{J}([0,1))$$

Dalej rozkład jednostajny skoncentrowany na $[0,1)$ będziemy nazywali <u>standardowym rozkł. jednostajnym</u>.

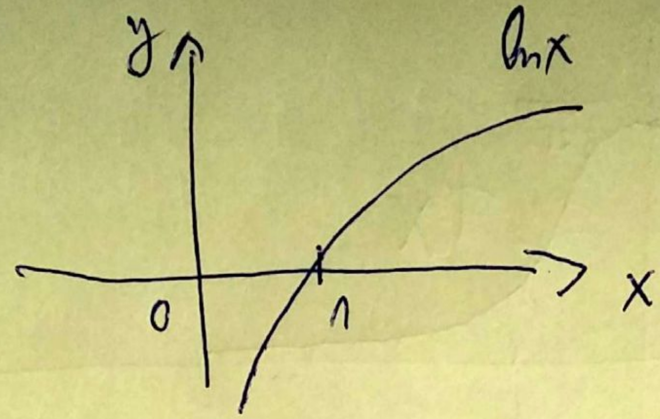
Niech teraz $X \in \mathcal{J}([0,1))$, $\lambda > 0$ ustalona liczba i weźmy zmienną losową

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-X), \text{ gdzie}$$

$\ln$ oznacza <u>logarytm naturalny</u>.

Znajdźmy rozkład zmiennej losowej Y.

Z kursu matematyki powinniśmy wiedzieć, że funkcja $\mathbb{R}_+ \ni x \longrightarrow \ln x \in \mathbb{R}$ ma postać



rys. 4

Ponieważ $X \in \mathcal{J}([0,1])$ (co oznacza, iż z prawdop. 1 $X(\omega) \in [0,1]$)

$1 - X(\omega) \in (0,1)$, dlatego

$\ln(1-X) < 0$, więc

$Y(\omega) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-X)(\omega) > 0$, (bo $\lambda > 0$)

Oznacza to, że Y jest skoncentrowana na $\mathbb{R}_+$, czyli

$F_Y(t) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) < t\}) = 0$,

dla $t \leq 0$.

Dlatego dalej wystarczy założyć, iż $t > 0$.

Więc dla każdego t, z definicji Y:

$$F_Y(t) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) < t\}) =$$

$$= P(\{\omega \in \Omega : -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - X(\omega)) < t\}) =$$

$$= P(\{\omega \in \Omega : \ln(1 - X(\omega)) > -\lambda t\}) =$$

$$= P(\{\omega \in \Omega : 1 - X(\omega) > e^{-\lambda t}\}) =$$

$$= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 1 - e^{-\lambda t}\}).$$

Zatem z definicji dystrybuanty

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ F_X(1 - e^{-\lambda t}), & t > 0. \end{cases}$$

Znajdźmy f_Y - funkcję gęstości rozkładu Y:

Potrzebna jest wiedza z rachunku różniczkowego (zasada różniczkowania funkcji złożonej)

$$f_Y(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{d}{dt} F_X(1-e^{-\lambda t}), & t > 0, \end{cases}$$

czyli dla $t > 0$

$$f_Y(t) = F_X'(1-e^{-\lambda t}) \cdot (1-e^{-\lambda t})' =$$

$$= f_X(1-e^{-\lambda t}) \cdot \lambda e^{-\lambda t}.$$

Możemy więc zapisać

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} f_X(1-e^{-\lambda t}), & t > 0 \end{cases}.$$

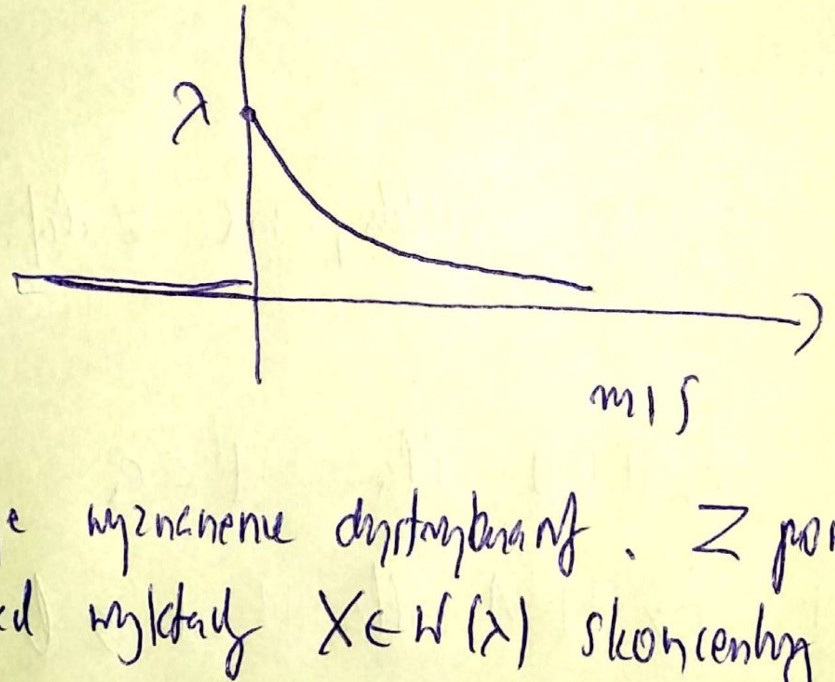
Pozostaje zauważyć, że

$0 < 1-e^{-\lambda t} < 1 \iff t > 0$, co

z def. rozkładu $X \in \mathcal{U}([0,1])$ oznacza, że

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}.$$

Dalej rozkład zadany funkcją gęstości jak wyżej (rys. 5) nazywamy rozkładem <u>WYKŁADNICZYM</u> i oznaczamy $Y \in W(\lambda)$.



rys 5

Pozostaje wyznaczenie dystrybuanty. Z powyższego wynika, że rozkład wykładniczy $X \in W(\lambda)$ skoncentrowany jest na $\mathbb{R}_+$. Dlatego

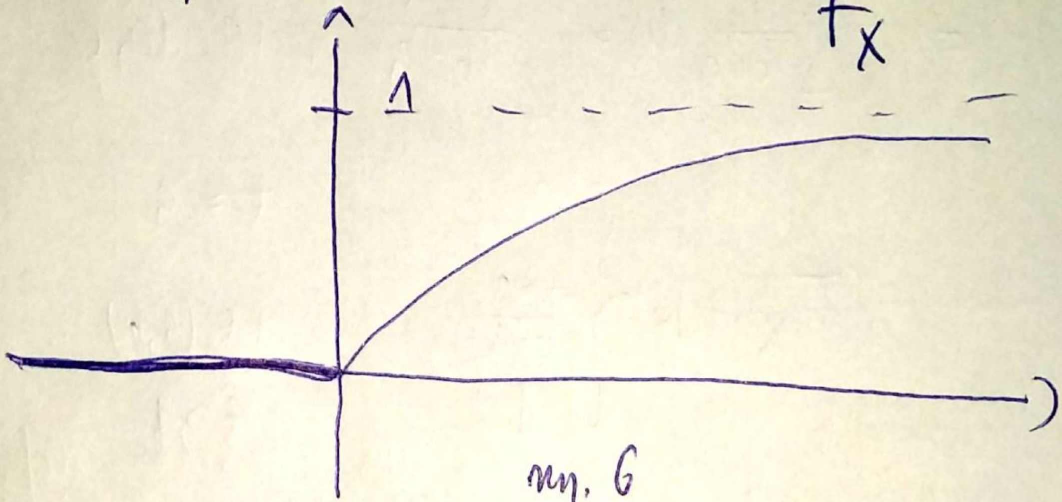
$$F_X(t) = 0, \quad t \le 0.$$

Niech więc $t > 0$. Wtedy:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du = \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda u}\,du =$$

$$= \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda u}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}, \; t \geq 0$$

przedstawia rys. 6



rys. 6

Przykład 2. Rozkład NORMALNY, zwany też rozkładem Gaussa albo centralnym.

$X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, gdzie $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

oznacza, iż funkcja gęstości dana jest w postaci:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Uwaga 1.

$$X\in N(m,\sigma^2) \equiv \frac{X-m}{\sigma}\in N(0,1)$$

Wtedy rozkład $m=0$, $\sigma=1$ nazywamy standardowym rozkładem normalnym, a jego dystrybuantę oznaczamy przez Φ.

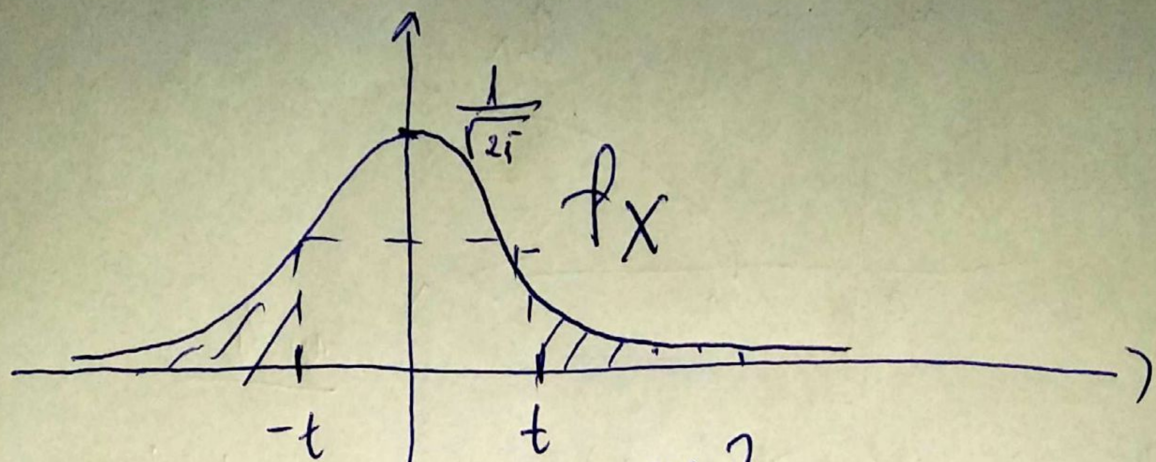
Uwaga 1 mówi, że każdy normalny można sprowadzić do standardowego normalnego i na odwrót.

Dalej załóżmy, że $X\in N(0,1)$.

Wtedy

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}, \quad t\in\mathbb{R},$$

a wykres jest jak na str. 7.



rys. 7.

Krzywą z rys. 7 nazywamy „krzywą Gaussa" albo „krzywą dzwonową".

Podstawowe własności $\mathcal{N}(0,1)$

1°. f_X jest symetryczna (f. parzysta)

2°. Z rys. 7. i 1° zakreskowane pola są jednakowe.

Stąd $\Phi(-t) = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) < -t\})$

$= P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) \geq t\}) = 1 - \Phi(t)$,

co oznacza, że wartości $\Phi(t)$ dla $t>0$ określają wartości $\Phi(t)$ dla $t<0$.

3°. Można udowodnić, że

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 3\}) \leq 0.05 .$$

Oznacza to, że cała istotna informacja objęta tym rozkładem dotyczy sytuacji, kiedy

$X(\omega) \in [-3, 3]$, a z symetrii

$X(\omega) \in [0, 3]$.

4°. Rozkład $N(0,1)$ (czyli Φ) jest stablicowany