PSK Informatyka 3 st. niestacjonarne

Konspekt do wykładu mającego odbyć się 15.03.

Temat 1

Przegląd modeli Kołmogorowa c.d.

Przypomnijmy, MPK jest opisem teoretycznym wyników obserwacji zjawiska losowego (ZL), czyli

$$ZL \longleftrightarrow (\Omega, \Sigma, P)$$

Do tej pory przypomnieliśmy dwa ważne przykłady MPK: model dyskretny i model warunkowy.

Pokażmy teraz dwa kolejne: model produktowy i geometryczny.

Przykład modelu produktowego.

Zacznijmy od sytuacji najprostszej: dane są dwa zjawiska losowe: ZL_1, ZL_2.

Jeśli każde z nich obserwujemy oddzielnie, to

$$ZL_1 \longleftrightarrow (\Omega_1, \Sigma_1, P_1)$$

$$ZL_2 \longleftrightarrow (\Omega_2, \Sigma_2, P_2)$$ oraz

! Załóżmy, że wyniki obserwacji jednego z nich w żaden sposób nie wpływa na wyniki drugiego.

Wtedy możemy dać opis dwóch zjawisk jednocześnie

$$ZL_1 \qquad ZL_2$$

$$ZL \; (\Omega, \Sigma, P), \text{ gdzie}$$

$$\omega \in \Omega \equiv \omega = (\omega_1, \omega_2), \quad \omega_j \in \Omega_j,$$

co zapisujemy $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (iloczyn kartezjański)

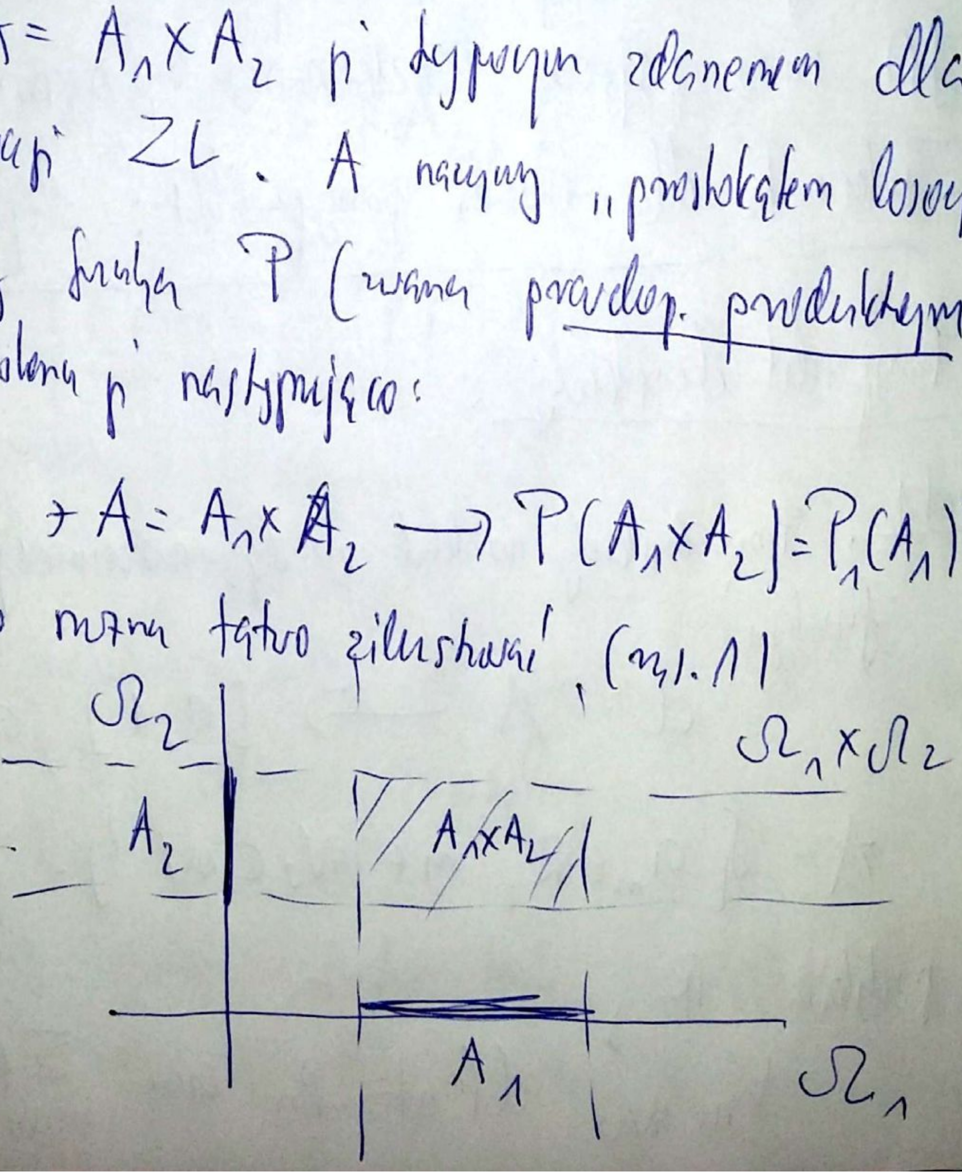
Jeśli teraz $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$, to

$A = A_1 \times A_2$ jest zdarzeniem dla obserwacji ZL. A nazywamy „prostokątem losowym”.

Wtedy funkcja P (zwana prawdop. produktowym) określona jest następująco:

$$\Sigma \ni A = A_1 \times A_2 \longrightarrow P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) P_2(A_2).$$

Wszystko można łatwo zilustrować (rys. 1)



rys. 1

<u>Uwagi do modelu produktowego</u>

1°. Weźmy dwa zdarzenia

$$A = A_1 \times \Omega_2, \quad B = \Omega_1 \times A_2$$

Zauważmy, że $A \cap B = A_1 \times A_2$ oraz

$$P(A \cap B) = P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) P_2(A_2)$$

Ale $P(A) = P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1) P_2(\Omega_2) = P_1(A_1)$

oraz

$$P(B) = P(\Omega_1 \times A_2) = P_1(\Omega_1) P_2(A_2) = P_2(A_2),$$

więc

$$\underline{P(A \cap B) = P(A) P(B)},$$

co oznacza, że zdarzenia A, B są zawsze stochastycznie niezależne.

Zatem model produktowy uwzględnia efekt stochastycznej niezależności i dlatego zakładamy, że <u>nie ma interakcji</u> pomiędzy ZL_1 i ZL_2.

Inaczej, gdyby interakcja była, to do opisu ZL <u>nie można byłoby</u> użyć m. produktowego.

W kolejnych wykładach wyjaśnimy to dokładniej.

2°. W sytuacji ogólnej możemy założyć, że mamy więcej ($n>2$) zjawisk losowych:

$$ZL_1(\Omega_1,\Sigma_1,P_1) \quad ZL_2(\Omega_2,\Sigma_2,P_2) \quad \ldots \quad ZL_n(\Omega_n,\Sigma_n,P_n)$$

$$ZL(\Omega,\Sigma,P)$$

(*) o których wiadomo, że wynik obserwacji żadnego z nich nie wpływa na wyniki pozostałych (efekt stochastycznej niezależności.)

Wtedy:

$$\Omega = \Omega_1\times\Omega_2\times\ldots\times\Omega$$

$$\omega\in\Omega \iff \omega=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n),\ \omega_j\in\Omega_j$$

Dla $A_1\in\Sigma_1,\ A_2\in\Sigma_2,\ldots,\ A_n\in\Sigma_n$

$A=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\in\Sigma$ nazywamy „n-kostką losową", oraz

$$P(A)=P_1(A_1)P_2(A_2)\ldots P_n(A_n).$$

W szczególności możemy mieć sytuację następującą:

(i) dane jest zjawisko losowe $ZL_0(\Omega_0, \Sigma_0, P_0)$

(ii) mamy n ($n \geq 2$) kopii tego zjawiska
$ZL_1(\Omega_1, \Sigma_1, P_1), ZL_2(\Omega_2, \Sigma_2, P_2), \dots, ZL_n(\Omega_n, \Sigma_n, P_n)$
o własności (*) ze str. 4.

Bierzemy $ZL(\Omega, \Sigma, P)$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n = \underbrace{\Omega_0 \times \Omega_0 \times \dots \times \Omega_0}_{n\text{-razy}}$$

$$\omega \in \Omega \equiv \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \quad \omega_j \in \Omega_0$$

Wtedy ω reprezentuje opis serii powtórzeń ZL_0, gdzie powtórzenia te są niezależne.

W szczególności, jeśli $\Omega_0 = \{\underset{\text{„porażka"}}{0}, \underset{\text{„sukces"}}{1}\}$

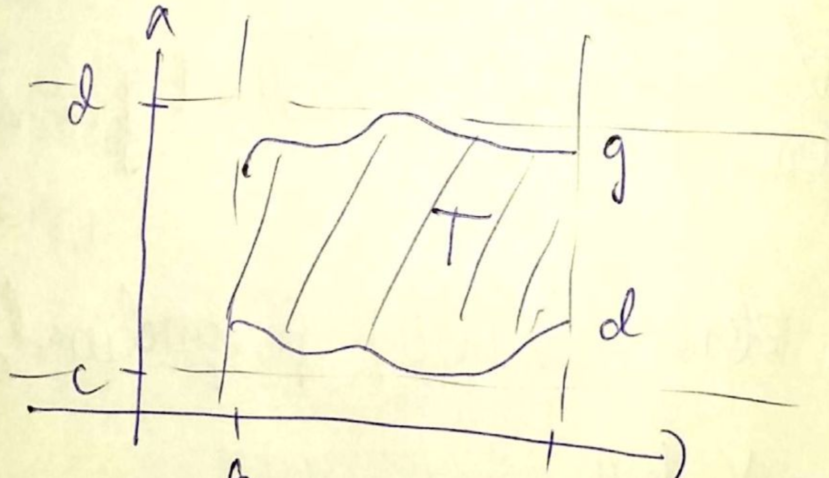
to (Ω, Σ, P) jest typu $B(n, p)$, gdzie $p = P_0(\{1\})$.

Przypadek modelu geometrycznego, jako modelu całkowicie niedyskretnego — zwanego ciągłym

Pokażmy na przykładzie modelu geom. typu $n=2$.
Jest to model produktowy, gdzie

$$\Omega_1 = I_1 = [a,b] \subset \mathbb{R}$$

$$\Omega_2 = I_2 = [c,d] \subset \mathbb{R}$$



rys. 2

Typowym zdarzeniem jest wtedy zbiór T (zwany „trapezem krzywoliniowym"), gdzie

$$T = \{(x,y) \in I_1 \times I_2 : d(x) \le y \le g(x)\}$$

d, g - funkcje ciągłe

Wtedy $$P(T) = \frac{\int_a^b (g(x) - d(x))\,dX}{(b-a)(d-c)},$$

czyli $P(T)$ jest proporcjonalne do $|T|$ – miary powierzchni trapezu T.

Uwaga

Model ten związany jest z pewnym klasycznym eksperymentem, który legł u podstaw teorii symulacji – Metody Monte Carlo.

Opis tego eksperymentu można znaleźć w mojej książce, jak i w zamieszczonym na moim WWW artykule o liczbie π.

Bardzo proszę o lekturę tego przypadku.

Temat 2. Pojęcie rozkładu prawdopodobieństwa.

Relacja

$$ZL \longleftrightarrow M.P.K.$$

jest podstawowa, ale niewystarczająca z punktu widzenia praktycznego przetwarzania.

Podstawowym powodem jest to, iż na ogół $\omega \notin \mathbb{R}$!

Dlatego potrzebne jest „uzupełnienie" tej relacji.

Jest nim pojęcie ROZKŁADU PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

Zrobimy to dla dwóch przypadków: dyskretnego i ciągłego.

Przypadek dyskretny.

Def 1. Przez dyskretny rozkład prawdop. rozumiemy każdą funkcję

$$d : A \longrightarrow [0,1], \text{ gdzie}$$

$A = \{a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}\}$ - przeliczalny podzbiór $\mathbb{R}$,

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_0}\ d(a_n) = p_n \text{ oraz } \sum_{n \in \mathbb{N}_0} p_n = 1.$$

P1. $A = \{0, 1\}$

$d(1) = p,\quad d(0) = q,$

$p, q \in (0,1),\quad p + q = 1$, co

mamy przedstawić

0	1
q	p

– „2-punkty" standardy rozkład

P2.

$A = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $p \in (0,1)$ – dane

$A \ni k \longrightarrow d(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Taki rozkład oznacz $B(n,k)$ i nazywamy Bernoulliego.

P3.

$A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – całk. nieujemne

$\lambda > 0$ – dane

$A \ni k \longrightarrow d(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Oznaczmy $P(\lambda)$ – Poissona.

Funkcję d można wyreprezentować inaczej. Mianowicie

Def 2. Powiemy, że F jest dystrybuantą rozkładu dyskretnego, jeśli

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$ oraz spełnia

co najmniej następujące warunki:

(i) $\lim\limits_{t \to -\infty} F = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} F = 1$

(ii) F niemalejąca

(iii) F jest lewo-stronnie ciągła, czyli

$$\forall_{t_0 \in \mathbb{R}} \quad \lim_{t \to t_0^-} F = F(t_0)$$

(iv) F jest przedziałami stała: $\mathbb{R}$ można podzielić na przedziały, że na każdym otwartym przedziale F jest stała.

TW 1. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość

$$d \longleftrightarrow F$$

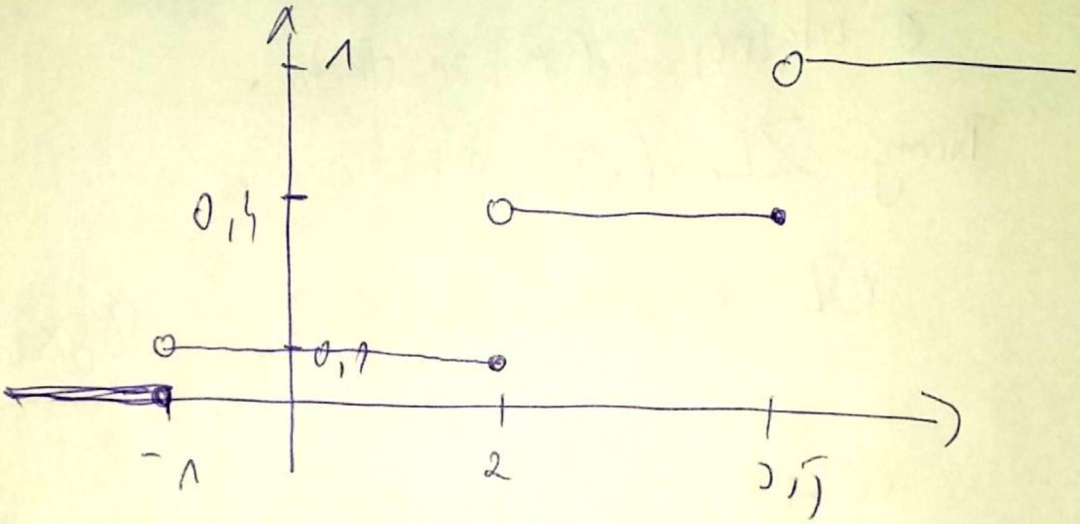
Zilustrujmy to przykładem

$d \longrightarrow F$

$d:$

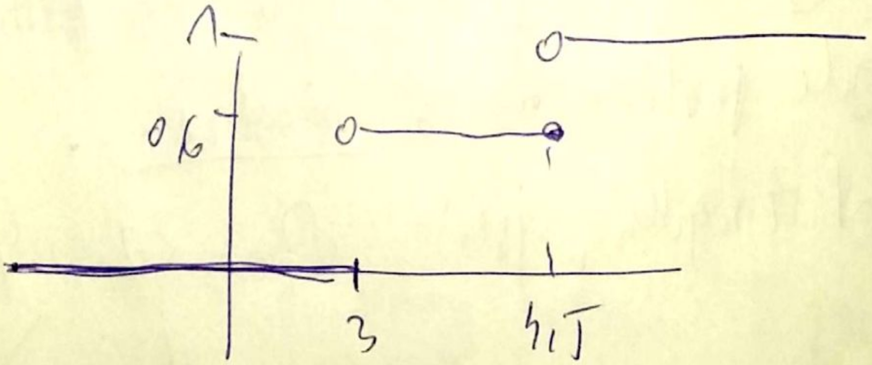
-1	2	3,5
0,1	0,3	0,6

F:



$F \longrightarrow d$

F:



$d:$

3	4,5
0,6	0,4

Potrzebny jest teraz „łącznik”, aby połączyć

$ZL(\Omega, \Sigma, P)$ z $d(F)$.

Jest nim ZMIENNA LOSOWA.

Def 3. Powiemy, że X jest dyskretną zmienną losową, jeśli istnieje ZL i MPK: (Ω, Σ, P), że

(i) $\Omega \ni \omega \longrightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}$

(ii) $\forall_{t \in \mathbb{R}} \ \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\} \in \Sigma$

(iii) zbiór $X(\Omega)$ jest przeliczalny.

Niech X będzie j.w. Wtedy z założenia

$$X(\Omega) = \{x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}\}.$$

Wtedy

$$A_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_n\},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Daje to nam partycję $\{A_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ zbioru Ω. Jeśli $p_n = P(A_n)$, to

możemy określić odwzorowanie:

$$X(\Omega) \ni x_n \xrightarrow{d} p_n,$$

które jest rozkładem prawd. w myśl Def 1.

Mamy zatem

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \; d(x_n) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_n\}) = p_n$$

Co więcej, wtedy funkcja

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\})$$

jest dystrybuantą, o której wspomina Tw. 1, czyli

$$d \longleftrightarrow F_X.$$

Zatem:

Kiedykolwiek jest mowa o ZJAWISKU LOSOWYM typu dyskretnego, to oznacza że:

1) dany jest dyskretny M.P.K (Ω, Σ, P)

2) dana jest dyskretna zmienna losowa X

3) jej „ilościowo" opisana jest funkcja d_X lub F_X (zwana f. „schodkową")

4) zadaniem d_X lub F_X jest pomiar zdarzeń (prawdopodobieństwa)

Mamy więc

$$(ZL) \longleftrightarrow MPK(\Omega, \Sigma, P) \longleftrightarrow X$$

$\hookrightarrow$ opisana przez d_X lub F_X.

Przykłady.

1) $X \in B(n,p)$ oznacza, że

$X(\Omega) = \{0,1,2,\dots,n\}$,

$P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

2) $X \in P(\lambda)$ oznacza, że

$X(\Omega) = \{0,1,2,\dots\}$

$P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) = k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

3) Przypuśćmy, że obserwujemy ciąg serii niezależnych powtórzeń zjawiska losowego danego rozkładem

0	1
q	p

, $p \in (0,1)$, jak przedstawiono to poniżej

# serii	# powtórzeń
1	•
2	• •
3	• • •
4	• • • •
	itd.

Dla każdego ~~powtórzenia~~ serii k, zakładamy, że pierwsze $k-1$ powtórzeń daje porażkę, k - sukces i dlatego seria jest zakończona:

Serie odbywają się niezależnie.

Modelem teoretycznym tej sytuacji jest zmienna losowa X (i jej rozkład):

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, \dots\}, \text{ gdzie}$$

$X(\omega)$ - długość serii

$$P(\{\omega\in\Omega : \underset{\substack{\| \\ (\underbrace{0,0,\dots,0}_{k-1},1)}}{X(\omega) = k}\}) = q^{k-1}\cdot p$$

$$P_0(\{0\}) = q$$

$$P_0(\{1\}) = p$$

Mówimy, że X ma rozkład geometryczny.

4) O związku pomiędzy $B(n,p)$ a $P(\lambda)$

Niech $X \in B(n,p)$, czyli

$$p_k := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ponieważ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, oraz

operacja ! generuje DUŻE liczby, posługiwanie się p_k jest NIEWYGODNE!

Pokażę, że p_k można <u>przybliżyć</u> rozkładem $P(\lambda)$.

W tym celu niech $\lambda = np$, czyli $p = \frac{\lambda}{n}$

Wtedy

$$p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

Ale dla dużych n:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \approx 1$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \simeq e^{-\lambda}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \simeq 1, \quad \text{dlatego}$$

$$p_k \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = k\}),$$

gdzie $Y \in P(\lambda)$.

I to jest treść tego przybliżenia.