

PT1 W2

T: . Matematyczne wprowadzenie do PT1 c.d.
Wstęp do teorii informacji.

1^o. Pojęcie rozkładu prawdopodobieństwa.

Wiemy, że każde zjawisko losowe ma swój model (MPK)

Przeglądajmy portaj (Ω, Σ, P) , gdzie

$\Omega \ni \omega \rightarrow$ wynik doświadczenia

$\Sigma \ni A \subset \Omega$ - zdarzenie (losowe)

$\Sigma \ni A \longrightarrow P(A) \in [0, 1]$ f. prawd.

W zastosowaniach postępujemy w MPK p' nie wygodne*

Wprowadza się pojęcie zmiennej losowej (random variable),
którą oznaczamy najczęściej przez X .

Ja to funkcja

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

Którym zadaniem jest „przetłumaczenie” $\omega \in \Omega$ na liczbę.

* w naszym przypadku nie jest liczbą, dane zjawisko losowe możemy opisać za pomocą MPK

Dodatkowo wymaga się od X , aby

$$\bigvee_{t \in \mathbb{R}} \{ \omega \in \Omega : X(\omega) < t \} \in \Sigma. \quad (2)$$

Jeśli X ma własności (1) i (2), to możemy zdefiniować kolejną funkcję, oznaczoną przez F_X , gdzie

$$(3) \quad \mathbb{R} \ni t \longrightarrow F_X(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(\{ \omega \in \Omega : X(\omega) < t \}).$$

Funkcja F_X dana w (3) nazywa się funkcją dystrybucyjną względem prawdopodobieństwa.

W zastosowaniach, zmienna losowa może mieć naturę dyskretną albo całkowicie niedyskretną, nazywaną też ciągłą.

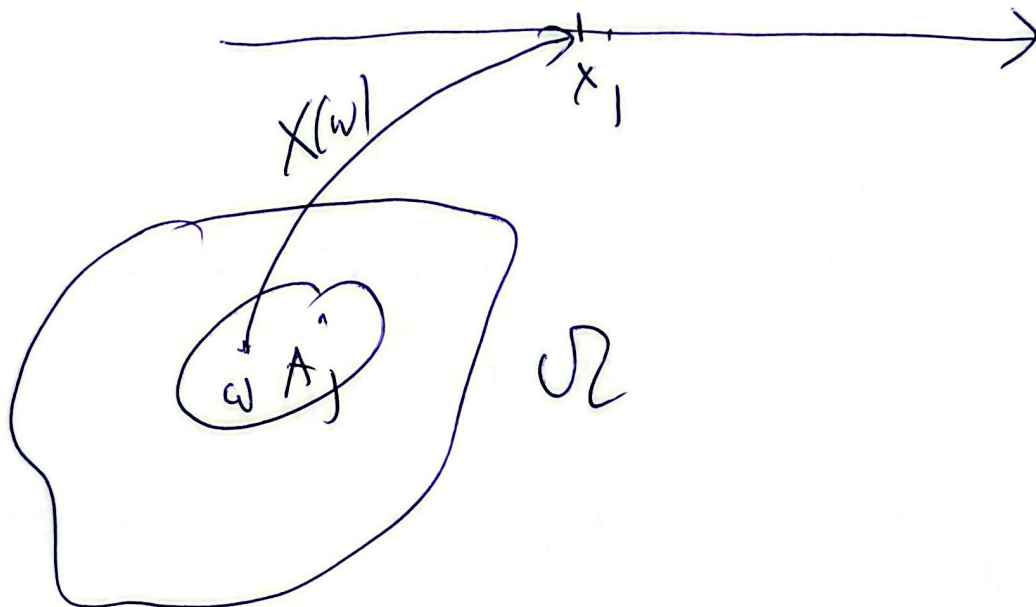
Def 1 ZL ma naturę dyskretną, jeśli dla MPK (Ω, Σ, P) istnieje zmienna losowa X , u
 $X(\omega) \in \mathbb{R}$ i podzbiorem przelicznym,
a m.j. $X(\omega)$ i liczby z $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$.

W szczególności $X(\omega)$ może być skończony -
 Ograniczony m. do tej sytuacji, czyli

$$(1) \quad X(\omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}, \quad n \geq 2.$$

Dla każdego $1 \leq j \leq n$, niech

$$A_j \stackrel{\text{def}}{=} \{ \omega \in \Omega : X(\omega) = x_j \} \in \mathcal{Z}$$



Wtedy warunkiem (1) oznacza, że $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$
 jest partycją Ω zbioru rozdzielności.

Żeby nam to ciąg $p_j \stackrel{\text{def}}{=} P(A_j) \in (0, 1)$,

gdzie

(5)

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1.$$

Pomijając wyniki możemy przedstawić tabelkę

⑥

x_1	x_2	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n
p_1	p_2	$\dots$	p_j	$\dots$	p_n

gdzie $x_j \in \mathbb{R}$, $p_j \in (0, 1)$ i zachodzi (5)

Można udowodnić, że na odwrót: dla każdej tabelki typu ⑥ istnieje:

1) ZL

2) MPK $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

3) zm. losowa X : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$p_j = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\}).$$

Niech ⑥ nazywamy (dyskretnym) rozkładem prawdopodob.

Mamy zatem dwie opisy ZL:

— rozkład prawdop. (6)

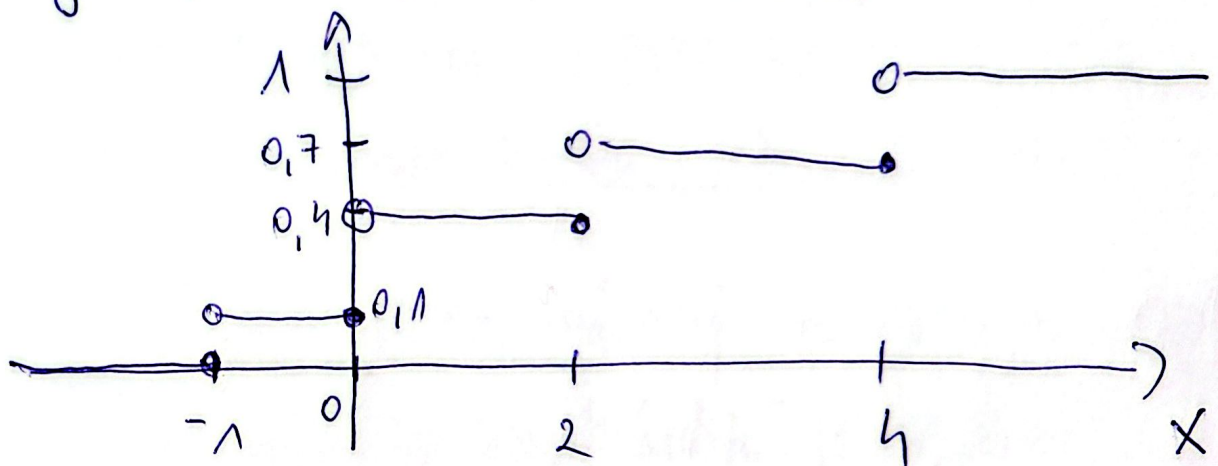
— funkcja dystrykcyjna F_X .

P1. Narysuj tabelkę

-1	0	2	4
0,1	0,3	0,2	0,4

Mamy r.p., a my p. to opis (linburg) obserwacji
pewnego ZL o wynikach 2 -1, 0, 2, 4 y.

Wtedy F_X ma postać (dlaczego?)



Wtedy F_X dla rozkładu dyskretnego rozrywaj f. skokową.

2. Wskaz do t. informacji

N IT przyjmuje m, że informacja jest pojęciem pierwotnym
(podobnie jak zbiór w matematyce).

Wtedy nie istnieje ścisła definicja informacji za
pomocą pojęć pierwotnych (!)

Dokładniej, sens pojęcia informacji wyraża się na poziomie odpowiadającym ludzkiej intuicji.

Przełoży to do dwóch podstawowych punktów miedzy informacją:

- obiektywnego - jest to podjęcie matematyczne, które opiera się na pojęciu ENTROPII.
Należy informacja oznacza pojęcie wewnętrzne Przyjęcie,
a więc ma swoje źródło, adresata i odbiornika;
- subiektywnego $\Rightarrow$ informacja ma charakter względny
i jest tym, co umysł ludzki jest w stanie
postrzegać i wykonywać do własnych celów
(patrz Link podany w opisie kursu)

W tym kursie będący zajmowali się tylko informacją
w rozumieniu podjęcia obiektywnego.

Podejście obiektywne

W tym podejściu informację przedstawia on za pomocą modelu opisującego źródło tej informacji, oraz określenia mierz jej ilości.

Pierwszym, która zaprezentował taki model był amerykański matematyk Claude Elwood Shannon (1916-2001).

W 1948 opublikował pracę „Matematyczna teoria komunikacji”

W teorii informacji Shannona, informacja mierzona jest jako prawdopodobieństwo zajścia pewnego zdarzenia, gdzie zdarzenia mniej prawdopodobne daje więcej informacji.

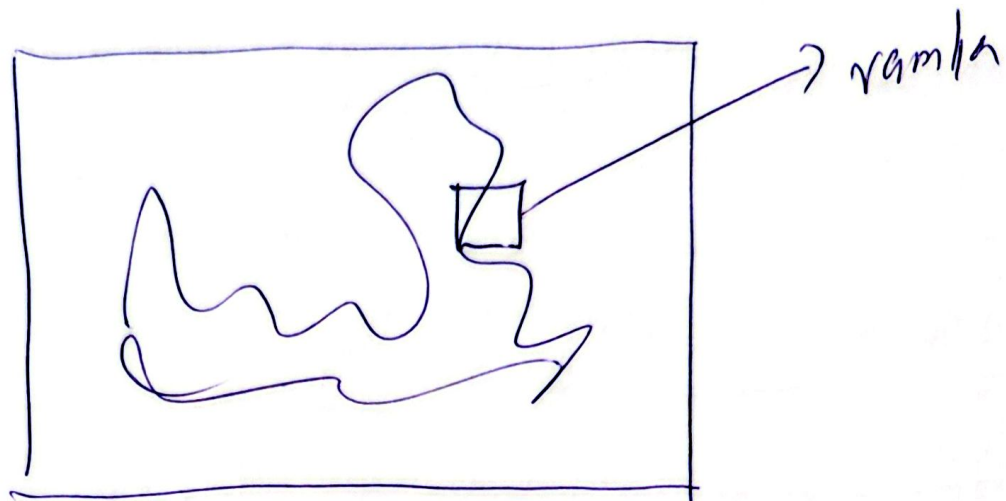
Blisko wg. Shannona informacja rozumiana jest jako poziom niepełność jej odbiorcy związany z tym, co jest przekazywane.

Dokładniej, informacja stanowi tylko te symbole, które są nieokreślone w tym sensie, że odbiorca nie ma pewności, co dokładnie otrzyma, boiem

† [jeśli (zgodny) mamy co otrzymamy, to informacja na ten temat już posiadamy i niniego nowego się nie dowiadujemy.

Przykład

Wyobraźmy sobie, że oglądamy pewien rysunek poprzez niewielki wizjer (ramkę),



przesuwając to okienko " $\longleftrightarrow$ " lub " $\updownarrow$ ".

Zatem w danej chwili obserwujemy jedynie fragment całości.

Ten fakt, w pewnym ograniczonym zakresie, pozwala nam np. przewidzieć kolejne kolory, jak będzie on wyglądał przy przesunięciu okienka.

Oznacza to, że na podstawie danego zlewna pikseli możemy szacować prawdopodobieństwo wystąpienia określonych sekwencji pikseli, które w danej chwili są dla nas niewidoczne.

Jeli po przesunięciu okienka okaże się, że przewidziany kolor (dane przewidyw.) różni się od rzeczywistego z tego informacja będzie niewielka.

W precyzyjnym sensie, zysk informacji będzie znany.

W teorii informacji wyrażenia o informacji ze złożeniem dyskretnym $\equiv$ ze skończoną liczbą symboli, oraz ciągami niedyskretnymi (ciągłymi) - # symboli jest nieprzeliczalny.

Dotyż skupimy się na przypadku dyskretnym

W takim przypadku definiuje się tu, ALFABET, czyli zbiór symboli (informacji elementarnych).

Na podstawie ALFABETU definiuje się ciąg informacji. Istotą obiektywnego pojęcia informacji jest ciąg tych ciągów i ich kolejności.

Przykład.

Niech $\mathcal{A} = \{\alpha, \rho\}$ - alfabet

$s(\mathcal{A})$ - ciąg informacji nad alfabetem $\mathcal{A}$,

gd. $s(\mathcal{A}) = (\alpha, \rho, \alpha, \rho, \rho, \dots)$

Problem

Bierzemy $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \dots, 9\} \subset \mathbb{Z}$

Ustalamy ciąg $n \geq 2$. Niech $S_n(\mathcal{A})$ - n -elementowy ciąg informacji nad alfabetem $\mathcal{A}$,

$$S_n(\mathcal{A}) = (d_1, d_2, \dots, d_n), \text{ gdzie } d_j \in \mathcal{A}, \\ d_1 \neq 0.$$

Podać przepis na przyporządkowanie

$$S_n(\mathcal{A}) \longrightarrow r \in \mathbb{R}, \text{ aby}$$

r odpowiadał zapisowi $S_n(\mathcal{A})$ w ultradzielnym,