

Temat : Źródła informacji i jej miara.

Zabawa : 1) Informację postrzegamy obiektywnie, czyli w przebiegu matematycznym w rozumieniu C. Shannona.

2) Takie przebiegi wymaga ustalenia źródeł jej przechowania – sposobów jej generowania.

3) Ponadto wymagany jest jej opis ilościowy, czyli potrzebna jest miara binowa informacji.

4) Dla uproszczenia (które jest podstawą) kiedy zajmowali się tylko informacją ze zbioru dyskretnym – dobitniej mówiąc zbiór symboli (tj. alfabet) gdzie skończony.

I Modele źródeł informacji:

(*) Chodzi o matematyczny opis obrotu Ruyana, który w sposób losowy generuje kolejne symbole.

Tak rozumiany model źródła informacji oznacza p.n. S .

Zabawa (*) oznacza, że S jest realizacją procedury przewidywania reprezentującego przez parę

Zmienną losową X , określającą

(i) istniejące MPK (Ω, Σ, P)

(i') $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

(ii') $F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq t\})$, $t \in \mathbb{R}$

(iv) $X(\Omega)$ p' skocym (bo dyskrete) podzbiorem $\mathbb{R}$.

Uwaga

W praktyce, nie zawsze ten model jest znany, mamy tylko,
że p' dyskretny.

N T1 można mieć 3 rodzaje fch rozkładów zliczalnych:

1) DMS - Discrete Memoryless Source,
czyli dyskretny zliczalny bez pamięci.

DMS p' najprostszym modelem sporządzenia wszystkich rozkładów

Dla takiego S , jest $\mathcal{A}_S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ -
alfabet (a_j - symbole) i to w tym przypadku

~~$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$~~ $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$

(parzyka): $X|_{A_j} = a_j$ oraz $P(A_j) = p_j$

gdzie $p_j \in (0,1)$ i $\sum_{j=1}^m p_j = 1$

Dochod p_{m+1} w takim modelu oznacza, że emisja
kolejnych symboli odbywa się w niezależnych
stochastycznych
procesach

P1. Ponieważ, że dochod do emisji sekwencji
symboli $a_j \in \mathcal{A}_S$ w postaci ciągu

$$S = (a_2, a_3, a_4, a_5)$$

N omagamy namoczyć DMS, żeby obliczyć
prawdopodob. wystąpienia S należy skorzystać
z tw. produkcyjnego MPK $(\Omega_4, \Sigma_4, P_4)$,

gdzie $\Omega_4 = \Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega$

Jest $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$, $A \in \Sigma_4$,

gdzie $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \Sigma$

$$P_4(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

Stąd

$$P_4(\{s\}) = P(\{\omega : X(\omega) = a_2\}) \cdot$$

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_3\}) \cdot P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_4\}) =$$

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_4\}) =$$

$$= P_2 \cdot P_3 \cdot P_4$$

2. CSM - Conditional Source Model -

czyli warunkowy model źródła.

Do przedkierowania tego modelu musi wprowadzić
pojęcie warunkowego modelu probabilistycznego.

Niech (Ω, Σ, P) dany M.P.K.,

$B \in \Sigma$ i $P(B) > 0$.

Definiemy nowy MPK: $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{P})$, gdzie
 $\tilde{\Omega} = B$, $\tilde{A} \in \tilde{\Sigma} \Leftrightarrow \exists A \in \Sigma : \tilde{A} = A \cap B$



$\tilde{A}$ jest "śladem" A na B

$$(*) \quad \tilde{P}(\tilde{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Mozna ukladniti, i $\acute{e}$ $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{P})$ j $\acute{e}$ M. P. K.

Wtedy $\tilde{P}(\tilde{A})$ w $(*)$ czytamy jako

"prawdopodobieństwo" zajścia zdarzenia A
pod warunkiem, i $\acute{e}$ zrobiło zdarzenie B .

Upraszczamy m $\acute{o}$ notacja:

$$\tilde{P}(\tilde{A}) = P(A|B) \left(= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right).$$

Jeśli $\tilde{P}(\tilde{A}) = P(A)$, czyli

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow (P(B) > 0)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad \text{b}$$

oznacza, i $\acute{e}$ A i B s $\acute{a}$ stochastycznie niezależne.

P.2

Niech A, B - stochastyczne zmienne losowe.

Wtedy każda z par: A^c, B ; A, B^c ,
 A^c, B^c jest p-stochastycznymi zmiennymi losowymi.

Zad. domowe

P.3

Niech MPK $(\Omega, \bar{\Sigma}, P)$ i zdefiniujmy
model produktowy jak zrobiono w P1:

$(\Omega_2, \bar{\Sigma}_2, P_2)$, gdzie $\Omega_2 = \Omega \times \Omega$

$A_1 \times A_2 \in \bar{\Sigma}_2$, jeśli $A_1, A_2 \in \bar{\Sigma}$

$$P_2(A_1 \times A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

Bierny dwa zdarzenia w $(\Omega_2, \bar{\Sigma}_2, P_2)$

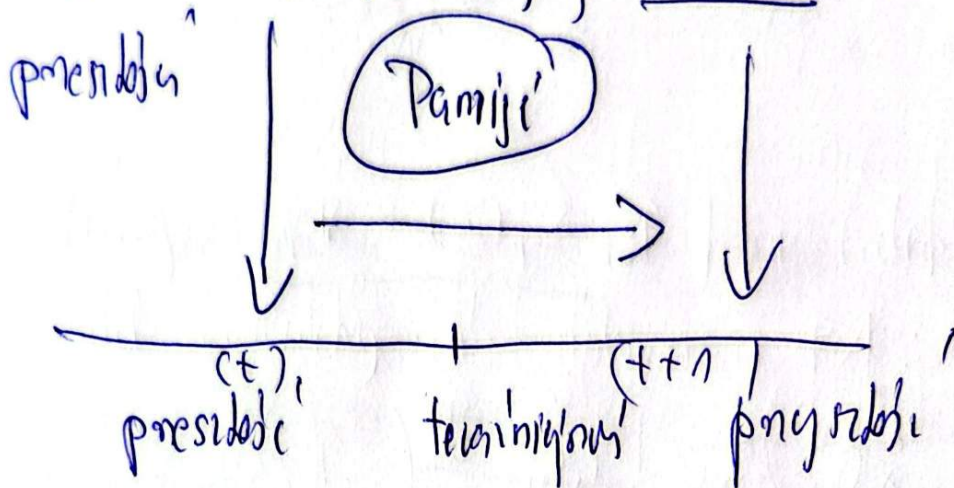
$$A = A_1 \times \Omega, \quad B = \Omega \times A_2$$

Pokaż, że A, B są stochastycznymi zmiennymi losowymi.

Wzrosty do CSM, który nazywany jest modelem (złoty) z pamięcią.

W CSM, w każdej chwili czasu t , go wewnętrzny odebranie z źródła selekcji

$S^t = (s_1, s_2, \dots, s_t)$, można na podstawie



przesłanie postaci kolejnego symbolu poprzez określone prawdopodob. warunkowe $P(\cdot | S^t)$.

Zatem "pamięć" źródła informacji ma wpływ na prawdopodobieństwo wystąpienia symbolu w chwili następnej, tj. $t+1$.

3. MSM - Markov Source Model

W MSM prawdziwa występnosć $a_i \in \mathcal{A}$ zależy jedynie od m symboli, które są jej bezpośrednimi poprzednikami, czyli

$$P(a_i | (a_{i-1}, a_{i-2}, \dots, a_{i-m})).$$

Problem

Jak ilościowo mierzyć informację w podanych modelach.

II Entropia - jako miara ilościowej informacji.

(tylko dla DMS)

C. Shannon zamknął tu do określenia ilościowej informacji potrzebny p funkcja postać

$$p \rightarrow I(p), \text{ gdzie}$$

p - prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym mierzona informacja p zawarta

$I(p)$ - wartość liczbową tej informacji (jej miara).

Dokładniej, dla funkcji I powinno być spełnione co najmniej trzy warunki:

(i) ~~I~~ zdany od prawdziw. zdaniem A ,
stad argumentem I p $p = P(A)$

(ii) Jeli dla A_1, A_2

$$p_1 = P(A_1) < p_2 = P(A_2) \text{ , do}$$

$$I(p_2) < I(p_1) \quad \equiv$$

mniej prawdopodobne zdanie $\rightarrow$ wijszy inform.

(iii) Jeli informacja zmienna p z mstopieniem
dwóch niezależnych zdarzeń A, B , z prawd.

$$P_A, P_B, \text{ do}$$

$$I(P_A \cdot P_B) = I(P_A) + I(P_B)$$

Ponadto powinno byc $\forall I(p) \geq 0$ oraz

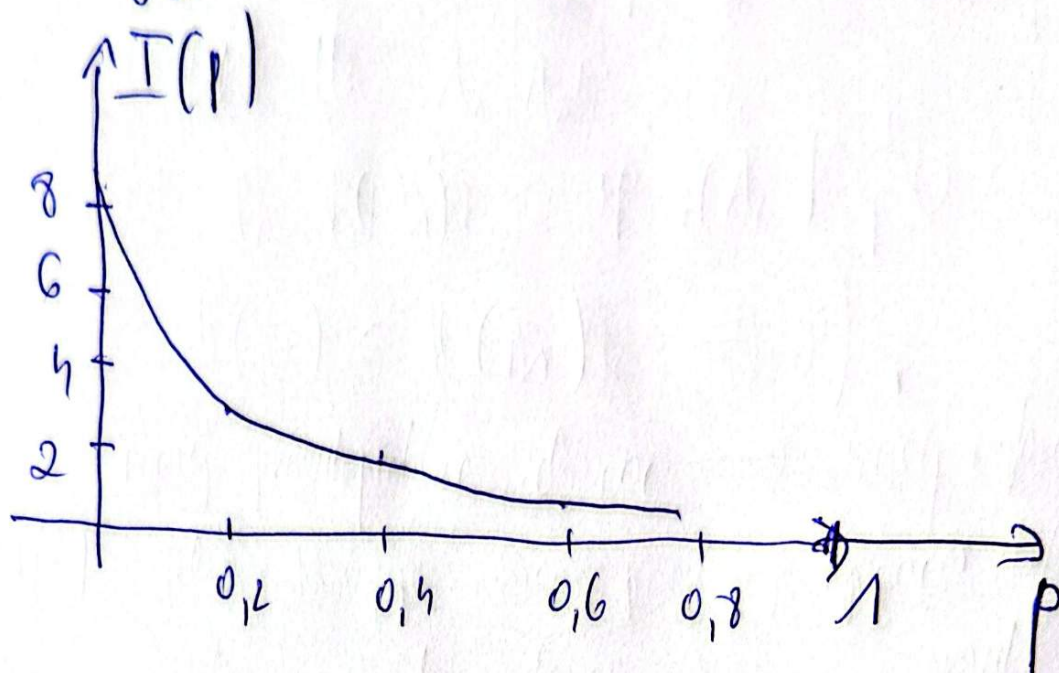
$$I(1) = 0 \text{ (dla inform. pewnej)}$$

C. Shannon zauważył, że wśród znanych funkcji
mocymskich istnieje funkcja, która spełnia powyższe:

$$I(p) = \log_r \frac{1}{p} = -\log_r p, \text{ gdzie}$$

$$r \in (0, 1) \cup (1, \infty)$$

P.4. Niech $\alpha=2$, wtedy $I(p) = -\log_2 p$
ma wykres



P.5. Rzucamy kostkę do gry (symetryczną).

Wtedy prawd. wystąpienia „6” wynosi $1/6$.

Niech $A = \text{„wystąpiło 6”}$

$p = 1/6$ - prawdop. A

$I(p) = -\log_2(1/6) = \log_2 6 = 2.585$ - ilość informacji, że to nastąpi.

P.6. Rzucający serię 4 razy, niezależnie.

Wtedy prawdop. pojawienia się $(6, 6, 6, 6) = (1/6)^4$
($(1/6)^4 < 0.001$ - mało).

$I(p) = -\log_2(1/6)^4 = -4 \log_2 1/6 = 4 \cdot 2.585 = \underline{\underline{10.34}}$