

PTI WŁ

T. Entropia c.d

Zakreślenie 1) Rozważamy tylko źródła typu DMS dyskrete.

2) S ma skończony alfabet $\mathcal{A}_S$,

$$\mathcal{A}_S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad n \geq 2$$

Wtedy każde $a_j \in \mathcal{A}_S$ bierze się za niezależny informacyjny element.

3) $\mathcal{A}_S$ generowane p' poprzez dyskretny zmienne losowe X , czyli istnieje MBR $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow X(\omega) \in \mathcal{A}_S$$

$$\text{dla } \forall \quad P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_i\}) = p_i' \in (0, 1)$$
$$\sum_{i=1}^n p_i' = 1$$

4) Miara informacji $I(a_i)$ jest wartością funkcji I ,

① czyli $I(p_i) = \log_2 \frac{1}{p_i} > 0$

5) Zadaniem źródła S p' generować informacje, które są ciągami skończonymi informacji elementarnych,
czyli

$$(\#) \boxed{S} \longrightarrow (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$$

$a_{i_j} \in \mathcal{A}_S$

Najmniejsza funkcja I i typ DNS powstała obliczeniowo w celu takiej informacji.

Mamy bowiem:

$$(2) \quad I(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}) = \log_2 \frac{1}{p_{i_1}} + \log_2 \frac{1}{p_{i_2}} + \dots + \log_2 \frac{1}{p_{i_k}}$$

↑
efekt składowy niezależności

Uwaga. Bardziej formalnie funkcja $\#$ można opisać następująco:
Niech $X_1, X_2, \dots, X_k$ zmienna losowa o wartościach X
i składowe niezależne.

Wtedy $(\#)$ oznacza, że ~~zależne~~

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k})(\omega)$$

zależne dla pewnego ω, u

$$(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k})(\omega) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$$

Wtedy DMS oznaczmy

$$P(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}) = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{ik}) \\ = p_{i1} p_{i2} \dots p_{ik}$$

Przykład. Ułóżmy słowo 50 znaków w postaci 10-ciom.
słowo ze zbioru

$$\mathcal{S} = \{a, b, c, d, e\}$$

słowo₁ ababcbdaeda

słowo₂ cdaaabcacc

słowo₃ bcdaacdabe

słowo₄ deabcbgaab

słowo₅ bdbdaaqaebcd

Ułóżmy

znak	a	b	c	d	e	Σ
k	17	11	10	9	3	50
f_k	0,34	0,22	0,20	0,18	0,06	1,00

k - # występowania, f_k - częstość

Oblicz entropię dla tych słów, zakładając, że $\mathcal{S}$ p.
modelem typu DMS.

72. Rzucaamy jednokroć symetryczną kostkę i monetę
jeden raz. Ponieważ nie ma powodu trzeździ, że
wynik z kostki ma wpływ na wynik monety i odwrotnie,
mamy przypadek DMS.

Opis probabilistyczny naszego eksperymentu:
dla f. MK $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mamy zmienne losowe
 X, Y :

$$X(\omega) = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$Y(\omega) = \{0, 1\}, \text{ gdzie}$$

$$\omega \rightarrow \omega \longrightarrow (X, Y)(\omega) = (i, s) \text{ gdzie}$$

$$i \in \{1, \dots, 6\}, s \in \{0, 1\}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} P(\{\omega \in \Omega : (X, Y)(\omega) = (i, s)\}) &= \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = i\}) \cdot P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = s\}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Bierzemy zbiór $S = \{(3, 1), (6, 0), (6, 1), (1, 0)\}$.

Podaj entropię dla S .

Wróćmy do syntezy opisanej ①.

Dla X jak u ① definiujemy

$$⑤ \quad H(S) = p_1 I(p_1) + p_2 I(p_2) + \dots + p_n I(p_n)$$

i naszym średnim ilości informacji generowanej przez źródło S .

P.3. Dla S niech $\mathcal{A}_S = \{a_1, a_2, a_3\}$, gdzie

$$P(\text{zweń}: X(u)=a_1) = p_1 = 1/2$$

$$P(\text{zweń}: X(u)=a_2) = \underset{\substack{\uparrow \\ p_2}}{P(\text{zweń}: X(u)=a_2)} = P(\text{zweń}: X(u)=a_3) = \underset{\substack{\uparrow \\ p_3}}{1/4}$$

Odczyt $H(S)$. Wynik podnosi z linbce $\log_2 3$.

Wróćmy do syntezy ogólnej. Dla $S, \mathcal{A}_S$ j.u.

niech X, Y dwuzmienne t.u.

$$P(\text{zweń}: X(u)=a_i) = p_i, \quad P(\text{zweń}: Y(u)=a_i) = q_i,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1.$$

Potrzebny dobre znany zasady zamiany podstawy
w logarytmie:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{dla} \quad \begin{matrix} a > 0, a \neq 1 \\ b > 0 \\ c > 0, c \neq 1. \end{matrix}$$

W szczególności dla $a=2, c=e$

e - tw. linii Eulera, niemyślna, $e \in (2, 3)$,
dokładnie $\log_2 b = \frac{\log_e b}{\log_e 2} = \frac{\ln b}{\ln 2} \quad (\log_e a = \ln a)$

Dla $a \rightarrow \ln a$ wiadomo, że zachodzi nierówność:
(*) $\ln a \leq a - 1 \quad | \quad a > 0, a \neq 1.$

Wtedy teraz

$$\sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{q_i}{p_i} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\ln \frac{q_i}{p_i}}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i}$$

Skąd i nierówność (*)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{q_i}{p_i} &\leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n p_i \right) = 0 \end{aligned}$$

Skąd z własności log

$$\textcircled{3} \quad \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{1}{q_i}$$

Nierówność $\textcircled{3}$ wynika z

$$\textcircled{4} \quad \forall X, Y \text{ j.u.}, \quad M(S) \leq \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{1}{q_i}$$

S, α_S

Dlatego u ogólniamy na $q_i = \frac{1}{n}$ $i = 1, 2, \dots, n$

z $\textcircled{4}$ dostajemy

$$M(S) \leq \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{1}{q_i} = \log_2 n$$

Mamy Tw 1. Jeśli S p typu DMS, to

$M(S) \leq \log_2 n$, czyli składowa entropia X nigdy nie przekracza wartości $\log_2 n$, gdzie n to liczba zdarzeń w $\textcircled{4}$ zachodzących, gdy $p_i = \frac{1}{n}$ $i = 1, 2, \dots, n$.

P4 . Przesyłamy wyniki stanów urządzeń, które może znajdować się w 4 stanach:

N - normalny

A, B, C - awaryjny

Stany zakodowano za pomocą 2 bitów:

N 00

A 01

B 10

C 11

Zadany, p : N p z prawd. 0,98

X: A - " - 0,01

B, C - " - 0,005

Cyfrę jeden odejść $\equiv$ 2 bitów.

Obliczmy ilość informacji dla każdego stanu i jej wartość średnią:

$$I(N) = -\log_2 0,98 = 0,02915$$

$$I(A) = -\log_2 0,01 = 6,644$$

$$I(B) = I(C) = -\log_2 0,005 = 7,644$$

$$M(S) = 0,98 \cdot 0,02915 + 0,01 \cdot 6,644 + 0,005 \cdot 7,644 + 0,005 \cdot 7,644 \approx \underline{\underline{0,769}} < \log_2 4 = 2$$

-8.

Zmierzamy tym sposobem kodowania tych znaków

N	0
A	101
B	110
C	111

Wtedy średnia liczba bitów na jeden znak wynosi:

$$1 \cdot 0,98 + 3 \cdot 0,01 + 230,005 = \underline{\underline{1,04}}$$

Zatem $M(S) < 1,04$ (dla starego kodowania mamy 2)

Mozna udowodnić, że tak p_i zawsze

Tw2. Średnia liczba bitów potrzebnych do zakodowania wiadomości ze źródła S (tym DMS) p_i nielemniejsza od $M(S)$