Materiały do wykładu PMBiA 5.11.2020

tryb ON-LINE

Temat. Rozkład prawdopodobieństwa c.d. – przykłady i rozkład ciągły.

Wstęp. Wiemy, że jeśli X oznacza dyskretną zm. los. to prawdopodobieństwa zdarzeń możemy obliczać za pomocą d_X – rozkładu prawdop. albo F_X – funkcji dystrybucji.

Pokażemy jak to działa na kolejnym przykładzie.

P1. Dla X jak wyżej, weźmy zdarzenia:

$$A = \{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) < b\}, \quad a < b$$

$$B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq b\}$$

$$C = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\}$$

Obliczmy prawdop. tych zdarzeń stosując d_X oraz F_X.

Dla zdarzenia A mamy:

$$A = \underbrace{\{\omega\in\Omega : X(\omega) < b\}}_{E} \setminus \underbrace{\{\omega\in\Omega : X(\omega) < a\}}_{F}$$

Zauważmy, że $F \subset E$ (dlaczego?), zatem

$$P(A) = P(E) - P(F) = F_X(b) - F_X(a)$$

Gdybyśmy chcieli obliczyć $P(A)$ za pomocą d_X, to musimy znać postać zbioru $X(\Omega)$.

Przypuśćmy, że $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$$P(\{x_j\}) = p_j, \quad j = 1,2,3,4.$$

Jeśli teraz np.: $a \le x_1, x_2 < b$,

to $P(A) = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) = x_1 \text{ lub } X(\omega) = x_2\})$

$$= P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) = x_1\}) + P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) = x_2\})$$

$$= d_X(x_1) + d_X(x_2) = p_1 + p_2.$$

Przypadek C zostawiam słuchaczom.

Zajmiemy się przypadkiem D.

$$B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < b\} \,\dot\cup\, \{\omega \in \Omega : X(\omega) = b\}$$

Zatem

$$P(D) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < b\}) + P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = b\})$$

$$= F_X(b) + P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = b\})$$

Mamy teraz <u>dwie</u> sytuacje

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = b\}) = \begin{cases} 0 ; & b \notin X(\Omega) \\ p_3 = d_X(x_3) & b \in X(\Omega), \\ & \text{np. } b = x_3 \end{cases}$$

Ale

$$d_X(x_3) = \lim_{t \to x_3^+} F_X(t) - F_X(x_3), \text{ dlatego}$$

$$P(D) = \begin{cases} F_X(b), & b \notin X(\Omega) \\ \lim_{t \to x_3^+} F_X(t), & b \in X(\Omega), \text{ np. } b = x_3 \end{cases}$$

P.2. Wiadomo, że X ma rozkład

d_X:

-1	2	3
$0{,}1$	$0{,}5$	$0{,}4$

Znaleźć rozkład $Y = 2X - 1$.

Z założenia $\exists$ ZL, a więc (Ω, Σ, P), że

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = -1\}) = 0{,}1$$
$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 2\}) = 0{,}5$$
$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\}) = 0{,}4$$

Z założenia $\forall_{\omega \in \Omega}\ Y(\omega) = 2X(\omega) - 1$, co pozwala nam wyznaczyć $Y(\Omega)$.

Zauważmy, że

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = -1\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = -3\}$$
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 2\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = 3\}$$
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = 5\}$$

Zatem d_Y

-3	3	5
$0{,}1$	$0{,}5$	$0{,}4$

//

Przypadek rozkładu ciągłego

Rozważmy teraz sytuację skrajną do rozkładu dyskretnego — będziemy mówili o rozkładach całkowicie niedyskretnych. Dalej nazwiemy je rozkładami ciągłymi.

Podstawowym parametrem (liczbowym) opisującym taki rozkład jest funkcja dystrybuanty, a mi

$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, gdzie

~~Def (rozkład ciąg)~~

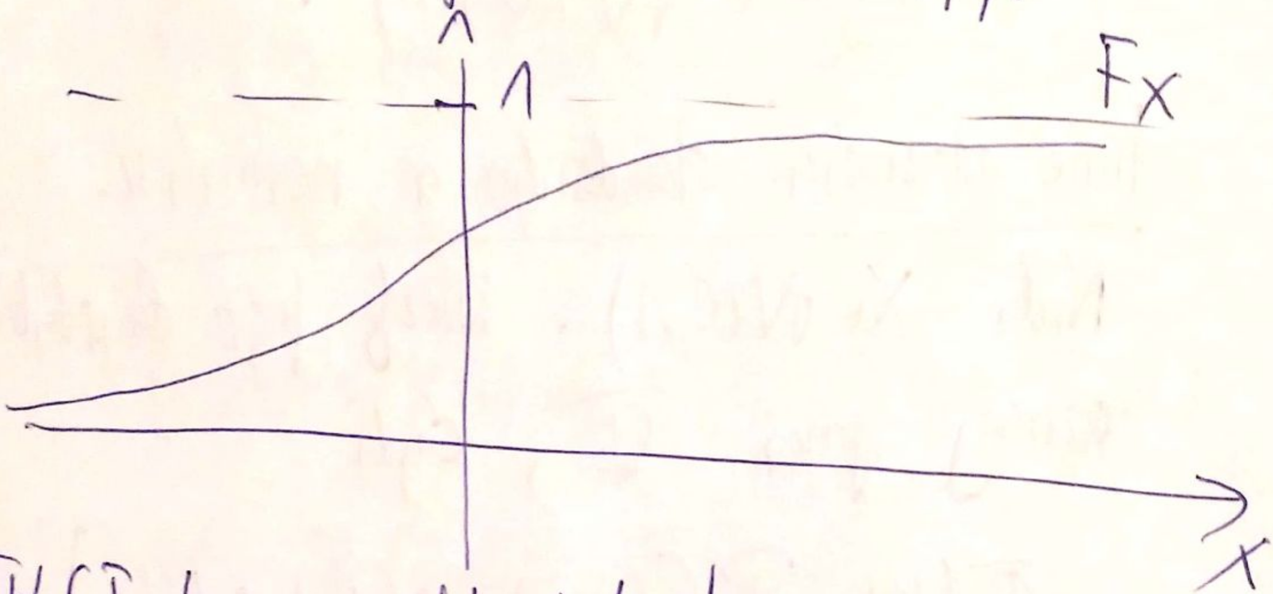
$$\forall_{t \in \mathbb{R}} \; F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}).$$

Def (rozkład ciągły)

Powiemy, że X ma rozkład ciągły, jeśli F_X jest różniczkowalna. Wtedy jej pochodną F_X' oznaczamy przez f_X

i nazywamy funkcję gęstości rozkładu X.

P.7. Typowa postać rozkładu ciągłego



Tw (I tw. o rozkł. ciągłym)

Dla każdego rozkładu ciągłego F istnieje:

(i) co najmniej jedna ZL

(ii) co najmniej jeden MIK (Ω, Σ, P)

(iii) odwzorowanie (zmienna losowa)

$$X: \Omega \to \mathbb{R}, \text{ gdzie}$$

$$X(\Omega) = I \text{ – przedział liczbowy, i}$$

$$\forall t\in\mathbb{R} \ \{\omega\in\Omega : X(\omega) < t\} \in \Sigma$$

(iv) Funkcja

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)<t\}) = F(t),$$

co dalej piszemy $F = F_X$

(v) $\forall\, a<b$

$$P(\{\omega\in\Omega: a \le X(\omega) < b\}) = F_X(b) - F_X(a)$$

(vi) $\forall_{r\in\mathbb{R}}\ P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)=r\}) = 0$

(vii) dla $f_X(t) = F_X'(t)$, $t\in\mathbb{R}$

$$P(\{\omega\in\Omega: a \le X(\omega) < b\}) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,dt.$$

Uwagi do TW.

1) Warunki (iv), (v) zachodzą dla k. rozkładu

2) $\{\omega\in\Omega: X(\omega)=r\} = \{\omega\in\Omega: X(\omega)\le r\} \setminus \{\omega\in\Omega: X(\omega)<r\}$

Stąd $P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)=r\}) = \lim_{t\to r^+} F_X(t) - F_X(r) = 0,$

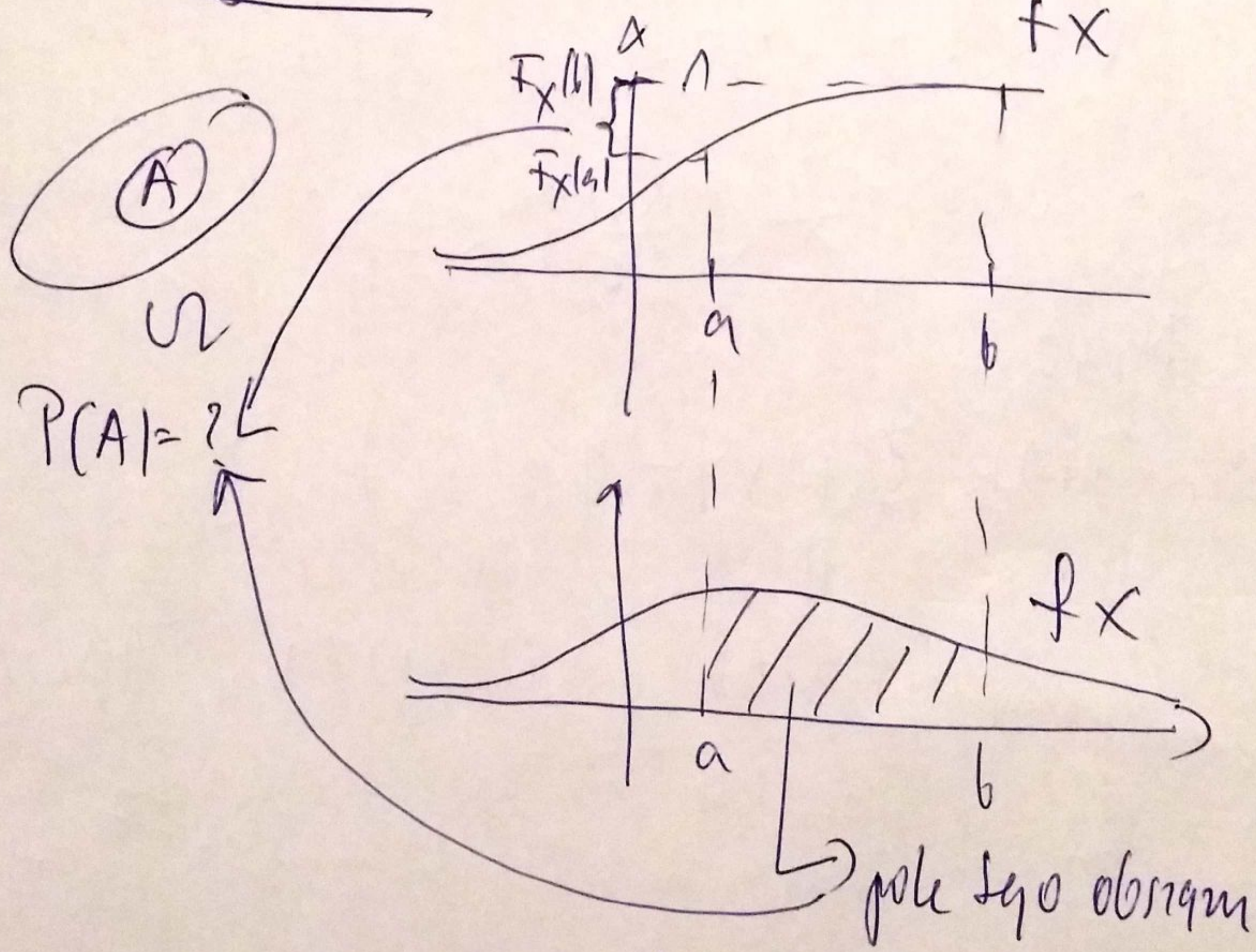
co wynika z ciągłości F_X, bo nawet jest różniczkowalna.

3) Ustalmy $a<b$. Z definicji $f_X = F_X'$ mamy:

$$\int_a^b f_X(t)\,dt = \int_a^b F_X'(t)\,dt = F_X(b) - F_X(a),$$

co z (v) daje (vii).

Mamy więc:



dwa sposoby obliczania $P(A)$ (tak jak to było w p. dyskretnym).

h) W szczególności z (1), biorąc $a \to -\infty$

(viii) $$F_X(b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\,dt, \quad b \in \mathbb{R}$$

Jeśli teraz $b \to +\infty$, to

(ix) $$\boxed{1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt}.$$

Na odwrót

Tw (II tw. o rozkł. ciągłym)

Dla każdej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $(f \geq 0)$, takiej że $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$, istnieje

F, która ma własności dystrybuanty r. ciągłego.

Co więcej, wtedy

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X \,, \quad t \in \mathbb{R},$$

a nie istnieje ZL, tj. MPK (Ω, Σ, P) oraz zm. losowa $X: \Omega \to \mathbb{R}$, że

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}) = \underset{\underset{\displaystyle F_X(t)}{\|}}{F(t)} = \int_{-\infty}^{t} f_X .$$

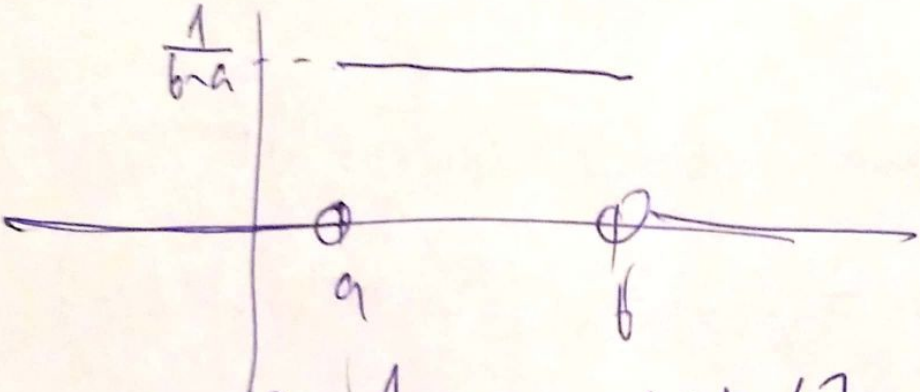
P. Znaczenie i własności rozkładów ciągłych przedstawimy na wybranych przykładach.

Przegląd wybranych rozkładów ciągłych.

1°. $X \in \mathcal{U}([a,b])$, $a < b$.

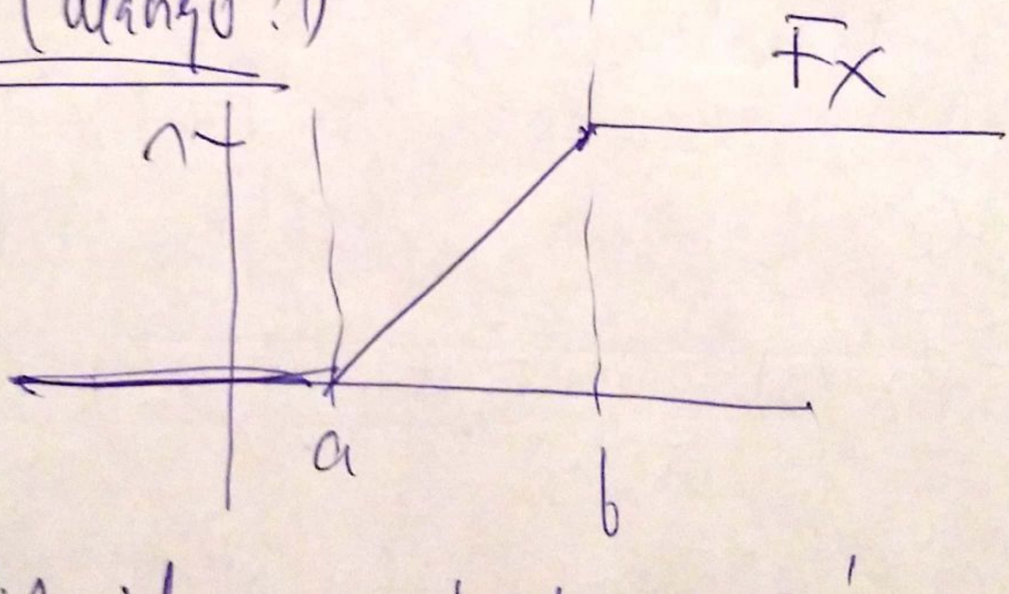
↓ „jednostajny" (albo „prostokątny")

Wtedy funkcja gęstości ma postać



$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a,b] \\ 0, & t \notin [a,b]. \end{cases}$$

Wtedy (dlaczego?!)



F_X jest jak na rysunku powyżej.

Zad 1.

Uzasadnić (tw. zasada SKALOWANIA)

$$X \in \mathcal{U}([a,b]) \iff Y = \frac{X-a}{b-a} \in \mathcal{U}([0,1])$$

Wtedy mówimy, że Y ma standardowy rozkład jednostajny.

2°. $X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, gdzie $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$\downarrow$

rozkład NORMALNY, zwany też GAUSSOWSKIM!

Postać f. gęstości

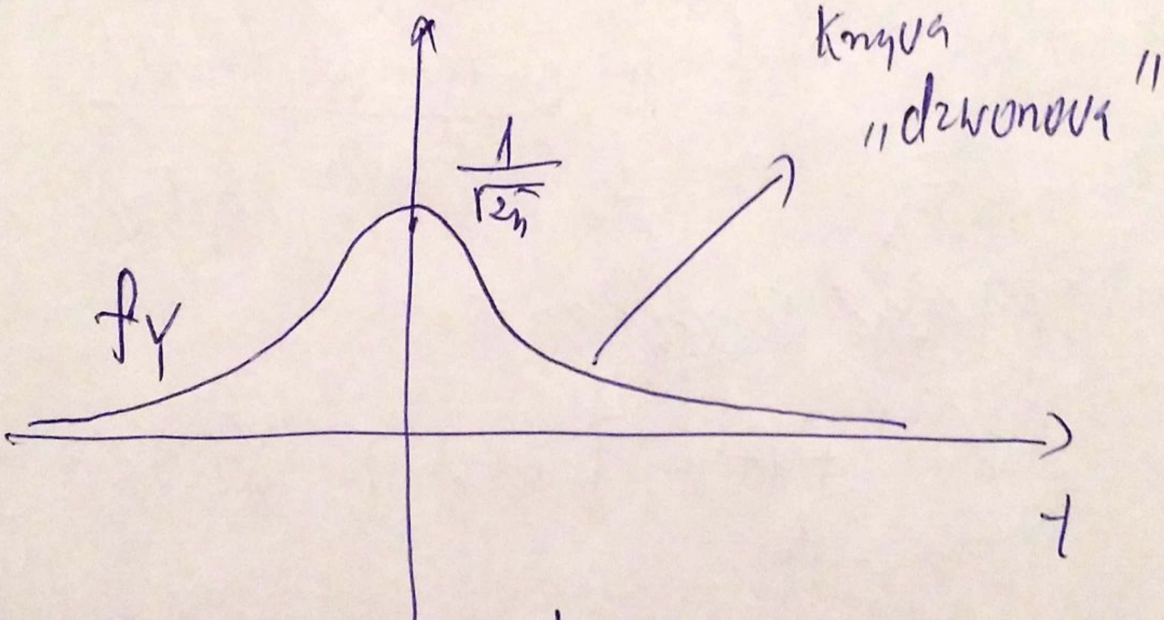
$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Jeśli $m=0$, $\sigma=1$, to mówimy, że mamy <u>standardowy</u> rozkład normalny.

Niech $Y \in \mathcal{N}(0,1)$. Wtedy z ogólnej definicji

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a więc f_Y jest <u>parzysta</u>.



<u>Fakt (zasada standaryzacji rozkł. normalnego)</u>

$$X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2) \iff Y = \frac{X-m}{\sigma} \in \mathcal{N}(0,1).$$

<u>Dowód</u>. Zadanie na ćwiczenia.

Zatem, jeśli $X \in N(-1, 2^2)$, to

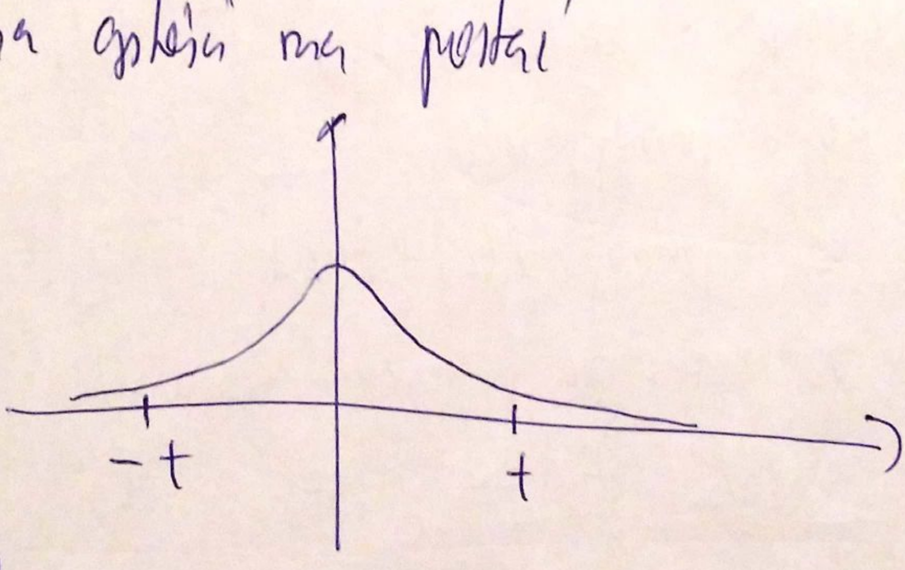
$$\frac{X+1}{2} \in N(0,1).$$

Inne własności standardowego r. normalnego.

Niech $X \in N(0,1)$. Wtedy jego dystrybuantę oznaczamy przez Φ, czyli

$$\Phi(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}).$$

Funkcja gęstości ma postać



Ustalmy $t>0$. Wtedy

$$\Phi(-t) = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) < -t\}) =$$
$$1 - P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) < t\}) = 1 - \Phi(t)$$

<u>Zatem</u>: wartości Φ dla argumentów ujemnych określone są przez wartości dodatnie, gdy $\Phi(0) = 1/2$ (dlaczego?).

W szczególności dla $t > 0$

$$P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| < t\}) =$$

dlaczego?

$$= P(\{\omega \in \Omega : -t < X(\omega) < t\}) =$$

$$P(\{\omega \in \Omega : -t \leq X(\omega) < t\}) = \Phi(t) - \Phi(-t)$$

$$= 2\Phi(t) - 1.$$

Ponadto, można udowodnić (zrobimy to później!), że

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 3\}) \leq 0{,}01$$

! [Oznacza to, że z <u>dostateczną</u> dokładnością Φ określona jest na $[0,3]$]

Zebrane to zostało w tzw. <u>tablicy</u> rozkł. normalnego.

<u>Zad 2</u>

Zapoznać się z <u>konstrukcją takiej tablicy</u>.

<u>Przykład</u>. Dla $X \in N(-2,1)$, obliczyć $P(A)$,

$A = \{\omega \in \Omega : \ |X(\omega)| < 0,5\}$.

Zauważmy, że

$$A = \{\omega \in \Omega : \ -0,5 < X(\omega) < 0,5\} =$$

$$= \{\omega \in \Omega : \ \frac{-0,5+2}{1} < \frac{X(\omega)-m}{\sigma} < \frac{0,5+2}{1}\}, \quad m=-2, \ \sigma = 1$$

Dlatego

$$P(A) = \underset{0,99379}{\underset{\parallel}{\Phi(2,5)}} - \underset{0,93319}{\underset{\parallel}{\Phi(1,5)}} \quad \text{(TABLICE)}$$