PMPiSt – materiały do wykładu 14.01.2021

Temat. Wprowadzenie do teorii testów statystycznych.

Wstęp. Zgodnie z przyjętą koncepcją metodologii wnioskowania statystycznego czas na zaprezentowanie etapu ostatniego – teorii testów statystycznych.

Przypomnijmy etapy wnioskowania statystycznego omówione do tej pory.

- Badamy populację generalną Π z cechą X. Jej modelem matematycznym jest MPK (Ω, Σ, P), gdzie $\Omega = \Pi$, a X oznacza wtedy zm. losową określoną na Ω.
- nie znamy rozkładu cechy X
- obserwacja Π polega na wybraniu z Π jej reprezentacji $\Pi_0 = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ i pobraniu materiału
  $$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (X(\omega_1), X(\omega_2), \ldots, X(\omega_n)),$$
  gdzie $x_j \in \mathbb{R}$.

• W modelu teoretycznym oznacza to, że

$(x_1, x_2, .., x_n) = (X_1, X_2, .., X_n)(\omega_0)$, gdzie:

$X_1, .., X_n$ - niezależne zm. losowe o rozkł. X,

$\omega_0 \in \Omega$

Możemy stwierdzić, że $(x_1, x_2, .., x_n)$ jest próbą prostą (wynikiem próbkowania) pop. gen. Π z cechą X.

• metodą dystrybuanty empirycznej (albo histogramu) ustalamy typ rozkładu X, gdzie korzystamy z faktu, że

$$F_n(t, \omega_0) \cong F_X(t)$$

dyst. empiryczna utworzona na podstawie p.p.

dystrybuanta teoretyczna rozkładu X.

• wynikiem tego etapu jest: $F_X(t, \theta)$, (co oznacza, iż nic znamy występujących we wzorze $F_X(t)$)

Niekiedy

co najmniej jednego z parametrów.

Długo w takim kiedy

- estymujemy tą wartość, czyli konstruujemy dwie statystyki

$$Z_1 = f_1(X_1, X_2 .., X_n),$$

$$Z_2 = f_2(X_1, X_2 .., X_n),$$

że dla przyjętej wartości $\alpha \in (0,1)$ (poziom istotności)

$$P(\{\omega \in \Omega : Z_1(\omega) < \theta < Z_2(\omega)\}) = 1-\alpha.$$

- Wtedy po skorzystaniu z p.p. mamy

(*) $\theta \in (Z_1(\omega_0), Z_2(\omega_0))$ z prawd. $1-\alpha$

Etap który omówimy na dzisiejszym wykładzie realizuje co najmniej dwa cele:

a) przeprowadza analizę dotychczasowych wyników analizy wnioskowania statystycznego

b) pozwala doprecyzować wynik (*).

Metodologia testu statystycznego

Podstawą tej metody jest postawienie wykluczających się sobie hipotez i ich weryfikacja na podstawie p. l.

Będziemy zajmowali się tylko przypadkiem, kiedy hipotezy dotyczą parametrów rozkładu cechy X. Z tego powodu takie testy nazywamy parametrycznymi, w odróżnieniu od testów nieparametrycznych.

Przypuśćmy, że mamy określony typ rozkładu cechy X w postaci $F_X(t, \theta)$, gdzie θ - nieznana wartość parametru.

Na podstawie wstępnych przesłanek, w tym wyników (*) formułujemy tzw. hipotezę zerową H_0, przeciwko hipotezie alternatywnej H_1, np. w postaci

$$H_0: \theta = \theta_0 \qquad H_1: \theta \neq \theta_0$$

(gdzie np. θ_0 średnich przedziału z (*)).

Możliwe są tylko dwie sytuacje:

albo H_0 jest prawdziwa albo fałszywa, W pierwszym przypadku, jeśli odrzucimy H_0, a więc przyjmiemy H_1, to mówimy o popełnionym błędzie I-rodzaju, którego miarą jest α – poziom istotności.

W przypadku drugim, jeśli H_0 przyjmiemy (a więc H_1 odrzucimy) to mówimy o błędzie II-rodzaju i jego miarę oznaczamy przez β.

Dalej będziemy zajmowali się tylko przypadkiem pierwszym. Wtedy taki test nazywamy testem istotności.

Realizacja testu istotności.

Niech dana będzie p.p.

$$(x_1, x_2.., x_n) = (X_1, X_2.., X_n)(\omega_0),$$

o ustalonym poziomie istotności $\alpha \in (0,1)$.

- Stawiamy hipotezę oraz przeciwną H_1

$$H_0 : \theta = \theta_0 \, ; \quad H_1 \;\; \theta \neq \theta_1$$

- podstawą weryfikacji hipotezy zerowej jest tzw. obszar krytyczny, a więc zbiór $C \subset \Omega$

spełniający warunek

$$\boxed{P(\{u \in \Omega : Z(u) \in G\}) = \alpha \text{ przy założeniu prawdziwości } H_0,}$$

gdzie Z jest odpowiednio dobraną statystyką,
czyli $Z = f(X_1, X_2 .. X_n)$.

- weryfikacja polega na skorzystaniu z d.p., czyli obliczeniu $Z(u_0)$.

Jeśli teraz $Z(u_0) \in G$, to wynikiem wnioskowania (= weryfikacji) jest odrzucenie H_0, na korzyść H_1. Popełniamy zatem błąd I-rodzaju z miarą α!

Jeśli natomiast $Z(u_0) \notin G$, to weryfikacja nie kończy się wynikiem stanowczym!
Mówimy tylko „że nie ma podstaw do odrzucenia", ale to nie oznacza stwierdzenia „przyjmujemy H_0".

Ilustracja weryfikacji metodą testów istotności:

P.1. Stwierdzono, iż cecha X p.g. ma rozkład typu $N(m, \sigma^2)$, gdzie wartość σ jest znana, natomiast wartość m była estymowana, zatem wiemy, iż

$$m \in (m_1, m_2) \text{ z prawd. } 1-\alpha, \text{ gdzie}$$

α – ustalony poziom istotności.

Niech $H_0: m = m_0$, gdzie $m_0 \in (m_1, m_2)$

$H_1: m \neq m_0$.

W tym przypadku G wyznaczymy za pomocą statystyki

$$Z = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n}$$

Dokładniej, aby wyznaczyć G, czyli rozwiązać równanie

$$P(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in G\}) = \alpha$$

musimy znać wartość m w def Z.

Niech na tę chwilę przyjmujemy, iż H_0 jest prawdziwa.

Mamy więc (przy H_0)

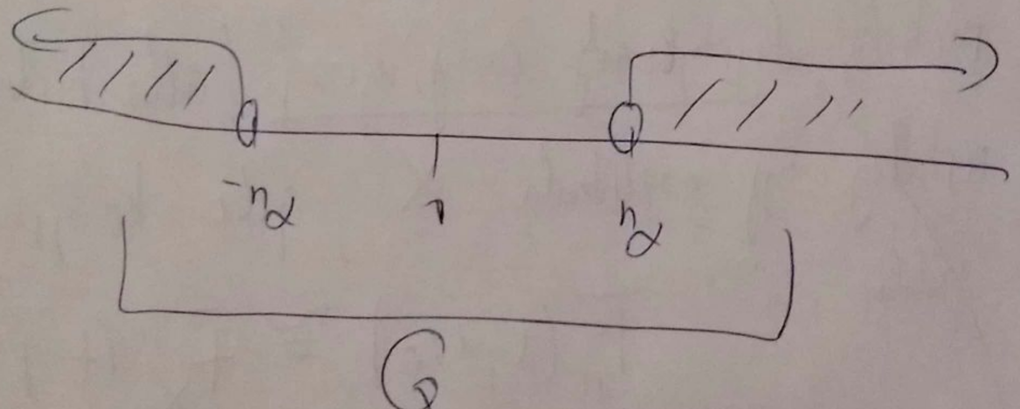
$$Z = \frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \in N(0,1)$$

i wtedy warunek

$$P(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in C\}) = \alpha$$ oznacza, że

$$C = (-\infty, -n_\alpha) \cup (n_\alpha, +\infty),$$ gdzie

$$\Phi(n_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$



Weryfikacja H_0 polega na sprawdzeniu relacji pomiędzy $Z(\omega_0)$ i C:

$Z(\omega_0) \in C \Rightarrow$ H_0 odrzucamy, bierzemy H_1 (z błędem α)

$Z(\omega_0) \notin C \Rightarrow$?

Dane liczbowe:

p.p. $(2,23, 2,12, 1,97, 2,01) = (X_1, X_2, X_3, X_4)(\omega_0)$

i ustalono, iż $X \sim N(m, (0,25)^2)$ ag.

$m \in (1,838, 2,328)$ z p. $1-\alpha = 0,95$

Niech np.

$H_0: m = 2, \quad H_1: m \neq 2$

Wtedy $C = (-\infty, -1,96) \cup (1,96, +\infty)$

(przy założeniu H_0!) ag.

$$Z(\omega_0) = \frac{\overline{X}_4(\omega_0) - 2}{0,25}\sqrt{4} = \frac{2,083 - 2}{0,25} \cdot 2 = 0,684.$$

Zatem $Z(\omega_0) \notin C$. Test jest nierozstrzygalny.

Weźmy teraz

$H_0: m = 2,3 \quad H_1: m \neq m_0$

Tym razem $Z(\omega_0) = \frac{2,083 - 2,3}{0,25} \cdot 2 = -2,17 \in C$,

zatem odrzucamy H_0.

P.2. Na podstawie wnioskowania statystycznego stwierdzono, że

$X \in N(m, \sigma^2)$, gdzie m, σ^2 są nieznane!

Estymowano m z wynikiem

$$m \in (m_1, m_2) \text{ z prawd. } 1-\alpha$$

na podst. p.p. $(x_1, x_2, \dots x_n) = (X_1, \dots, X_n)(\omega_0)$.

Bierzemy $m_0 \in (m_1, m_2)$ i formułujemy

$H_0: m = m_0 \qquad H_1: m \neq m_0$.

Tym razem C_α ma postać

$$C_\alpha = (-\infty, -t_\alpha) \cup (t_\alpha, +\infty), \text{ gdzie}$$

$$Z = \frac{\bar{X}_n - m}{S}\sqrt{n-1} \text{ i przyjęto } H_0.$$

Wtedy t_α wyznaczamy z warunku

$$P(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in C_\alpha\}) = \alpha$$

co oznacza, że t_α jest wartością krytyczną rozkładu t-Studenta o $n-1$ st. swobody.

Weźmy dane liczbowe

Niech p.p. ~~...~~ jak w P1.

$(2,23,\ 2,12,\ 1,97,\ 2,01)$.

Wynikiem estymacji jest wtedy

$m \in (1,899,\ 2,267)$ z pr. 0,95

gdzie $\overline{X}_n = \overline{X}_n(v_0) = 2,083$, $S(v_0) = 0,1$

Przy założeniu H_0 $(m = 2)$

$$C = (-\infty, -3,182) \cup (3,182, +\infty)$$

$$Z(v_0) = \frac{\overline{X}_n(v_0) - 2}{S(v_0)}\sqrt{3} = 1,4359 \notin C$$

Proszę sprawdzić co będzie jeśli

$H_0: m = 1,9$, $H_1: m \neq 1,9$.

7) . Stwierdzono, że $X \sim N(m, \sigma^2)$, $m, \sigma^2 = ?$.
Estymujemy σ. Weryfikujemy ten wynik, czyli

$$H_0: \sigma = \sigma_0 \quad H_1: \sigma > \sigma_0,$$

gdzie $\sigma_0 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ z prawd. $1-\alpha$.

Wtedy $C = (\chi^2_\alpha, +\infty)$, gdzie

χ^2_α wart. krytyczna rozkł. χ^2-Pearsona o $n-1$ st. swobody, bo

$$Z = \frac{nS^2}{\sigma^2} \text{ i } H_0 \text{ prawdziwa.}$$

Dane liczbowe

$(-0,01, 0,19, 0,09, -0,18, 0,40)$
$= (X_1, \ldots, X_5)(\omega_0)$
$\sigma^2 \in (0,0002, 0,267)$ $\alpha = 0,1$

Niech σ_0^2 środek tego przedziału : $H_0 : \sigma = 0,266$ H_1 $\sigma \neq 0,266$

Wtedy (sprawdzić to!) $C = (1,0636, +\infty)$

$$Z(\omega_0) = \frac{5 \cdot S^2(\omega_0)}{\sigma_0^2} = 373,53 \in C, \text{ a więc}$$

H_1 z prawd. $0,9$.