# Materiały do wykładu: PMPiSt 15.10.2020
## tryb ON-LINE

**Temat**. Model probabilistyczny zjawiska losowego (ZL)

**Wprowadzenie**.

Na przykładzie najprostszego ZL - pojedynczy rzut monetą, pokażmy, że opis takiego zjawiska może wyglądać następująco:

$$(W, S, m), \text{ gdzie:}$$

$W = \{O, R\}$ - zbiór wyników obserwacji

$S = \{\emptyset, W, \{O\}, \{R\}\}$ - zbiór wszystkich stanów

$m$ - miara, gdzie

$$S \ni s \longrightarrow m(s) \in [0, 1],$$ która ma co najmniej następujące własności:

$$m(\emptyset) = 0, \quad m(W) = 1, \quad m(s_1 \cup s_2) = m(s_1) + m(s_2)$$

$$\Downarrow$$

$$s_1 \cap s_2 = \emptyset$$

$$s_1 \subseteq s_2 \Rightarrow m(s_1) \leq m(s_2) \text{ (addytywność)}$$

(monotoniczność).

Wracając do omawianego ZL, wystarczy określić:

$$m(\{O\}) = p \in (0,1), \quad m(\{R\}) = q = 1-p \in (0,1).$$

W szczególności jeśli $p = q = 1/2$, to możemy powiedzieć, że ZL jest symetryczne ..

Zróbmy to jeszcze raz dla ZL: pojedynczy rzut dwiema monetami.

Krok 1: identyfikacja zjawiska — jest to ZL (dlaczego?)

Krok 2: Opis jakościowy, czyli ustalenie: W, S

Opis zbioru wyników W:

Problem: jak opisać sytuacje jak na obrazku poniżej

(ob 1) R O (ob 4) O O

(ob 2) R R

(ob 3) O R

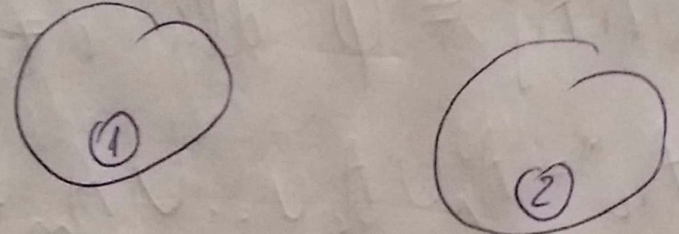
Zauważmy, że w sytuacji 2 i 4 nie możemy użyć pojęcia zbioru (dlaczego?), a wynik opisany sytuacjami 1-4 jest pojedynczy.

Oznacza to, że informacje zawarte w sytuacjach 1-4 muszą być zagregowane.

Aby to zrobić, przed wykonaniem eksper.

Należy sprawdzić rozróżnialność tych monet (może być tak, że są klonami, a więc nierozróżnialne!).

Robimy to następująco: etykietujemy, że



nazywając tę z ① „pierwsza", z ② „druga".
Wtedy (patrz. rys. 1-4)

$$W = \{(R,O), (R,R), (O,R), (O,O)\},$$

gdzie np. (R, O)

odczyt z ① — odczyt z ②.

Opis zbioru (rodziny) zdarzeń S:

Wiemy, że S składa się ze wszystkich podzbiorów zbioru W. Z matem. dyskretnej, wiemy, że (proszę sobie to przypomnieć!!!)

→

$$|S| = 2^{|W|} = 2^4 = 16,$$

$\downarrow$

moc zbioru

zatem $S$ jest 16-elem. rodziną.

<u>ZAD. 1</u> Proszę wypisać te elementy.

<u>Krok 3</u>. <u>Opis ilościowy</u>.

W tym celu weźmy dwa pomocnicze ZL:

1) pojedynczy rzut monetą (1)

2) — // — // — — (2)

Mamy dla nich odpowiednio

$(W_1, S_1, m_1)$: $W_1 = \{O_1, R_1\}$

$m_1(\{O_1\}) = p_1 \quad m_1(\{R_1\}) = q_1$

$(W_2, S_2, m_2)$: $W_2 = \{O_2, R_2\}$

— // — $m_2(\{O_2\}) = p_2$, $m_2(\{R_2\}) = q_2$

Defuny $m$ na $S$:

(*) $m(\{(R,O)\}) = m_1(\{R_1\}) m_2(\{O_2\}) = p_1 q_2$

$m(\{(R,R)\}) = m_1(\{R_1\}) m_2(\{R_2\}) = p_1 p_2$

itd.

Wtedy skutkujs pojedyncze, kiedy monety są klonami, wtedy $p_1 = p_2 = p$, $q_1 = q_2 = q$.

Zauważmy, że:

a) $W = \{(R,O)\} \dot\cup \{(O,O)\} \dot\cup \{(O,R)\} \cup \{(R,R)\}$

b) $m(W) = 1$

c) z zasady addytywności i def $m$ (*) prawa strona w a) ma postać:

$$pq + q^2 + qp + p^2 = p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1^2 = 1, \text{ czyli O'K}$$

ZAD2. Prosimy przeprowadzić tę procedurę dla 3 monet

ZAD3. Dla przypadku rzutu pojedynczą kostką, dwiema kostkami.

Uwaga. Ostatnie sytuacje (kilka monet) można zredukować do sytuacji:

Rzucamy dwukrotnie pojedynczą monetą, w taki sposób, aby wynik rzutu pierwszego nie determinował wyniku rzutu drugiego.
Mówimy wtedy o serii rzutów.

ZAD4. Prosimy przeprowadzić procedurę dla ZL, która składa się z
$ZL_1$ - pojedynczy rzut monetą
$ZL_2$ - pojedynczy rzut kostką.

-6-

## Uogólnienie powyższych przykładów.

Przypomnijmy pojęcie rodziny zbiorów.

Niech $X \neq \emptyset$ dany zbiór. Przez rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów $X$ rozumiemy zbiór, którego elementami są podzbiory $X$.

Zatem

$$A \in \mathcal{A} \iff A \subset X$$

Przykłady

$\mathcal{A} = \emptyset$ - rodzina pusta

$\mathcal{A} = \{\emptyset\}$ - rodzina jednoelementowa, i tym elementem jest zbiór pusty

$\mathcal{A} = \{A \subset X : |A| = 1\}$ - rodzina wszystkich jednoelementowych podzbiorów zb. $X$.

Każdą rodzinę $\mathcal{A}$ można poindeksować, czyli zapisać następująco:

$$\mathcal{A} = \{ A_t \subset X, \ t \in T \}$$

indeks  zbiór indeksów

<u>Przykłady</u>.

Jeśli $\mathcal{A} = \{A, B\}$, dla $A, B \subset X$ to kładąc $A_1 \stackrel{df}{=} A$, $A_2 \stackrel{df}{=} B$ mamy

$$\mathcal{A} = \{ A_i ; \ i \in \{1, 2\} \}.$$

Jeśli $T \subset \mathbb{N}$ – zbiór l. naturalnych, to $\mathcal{A}$ nazywamy <u>przeliczalną</u>. W szczególności, gdy $T$ skończony, to mamy

$$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$$

Niech dana będzie rodzina skończona

$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $A_j \subset X$.

$\mathcal{A}$ jest **partycją** zb. $X$, gdy:

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$

(ii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = X$.

Dalej potrzebujemy definicji rodziny

o nazwie $\sigma$-ciało (algebra)

↓

grec. lit. „sigma"

**Def** ($\sigma$-ciała/algebry)

Niech $\mathcal{A}$ rodzina podzbiorów danego zbioru $X$.

$\mathcal{A}$ jest $\sigma$-ciałem, gdy:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ → dopełnienie $A$

(iii) dla każdej przeliczalnej

podrodziny

$$\{A_n,\ n\in \mathbb{N}_0\} \subset \mathcal{A}$$

$$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n \in \mathcal{A}$$

Przykłady.

1) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ - najmniejsze $\sigma$-ciało (dlaczego?).

2) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ - rodzina złożona ze wszystkich podzbiorów zb. $X$ - największe $\sigma$-ciało (dlaczego?).

3) Niech każda $\mathcal{A}$ jest $\sigma$-ciałem.

Podać przykład

ZAD 4.

Dla $A \subset X$, weźmy $\mathcal{A} = \{A\}$.

Wiadomo, że (dlaczego?) $\mathcal{A}$ nie jest

σ-ciałem.

Zaproponować algorytm uzupełnienia

$\mathcal{A}$ do rodziny $\tilde{\mathcal{A}}$, która już

jest σ ciałem.

ZAD 5.

Niech $\mathcal{A}$ - σ-ciało. Pokazać, że

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \nabla B \in \mathcal{A}$$

↓

różnica symetryczna

Na koniec weźmy rodzinę $\mathcal{A}$, która nie jest $\sigma$-ciałem.

Weźmy wszystkie $\sigma$-ciała, które zawierają $\mathcal{A}$ (co najmniej jedno takie istnieje, dlaczego?).

Wtedy (i) przekrój takich $\sigma$-ciał $\tilde{\mathcal{A}}$ jest $\sigma$-ciałem ~~[illegible]~~

patrz ZAD 4

(ii) $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$

(iii) $\tilde{\mathcal{A}}$ jest najmniejszym $\sigma$-ciałem o własności (ii)

Oznaczmy je $\tilde{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A})$ i nazywamy $\sigma$-ciałem <u>generowanym</u> przez $\mathcal{A}$.

<u>Przykład</u> (WAŻNY!)

$\mathcal{A} = \{ [a,b),\ a<b,\ a,b \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{A}$ – nie jest $\sigma$-ciałem (dlaczego?)

Niech $\sigma(\mathcal{A})$ oznaczamy $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ i nazywamy

$\sigma$-ciałem borelowskim

---

Dziękuję za uwagę!