Materiały do wykładu PMPiS 18.11.2020
tryb ON-LINE

Temat. Parametry rozkładu c.d.

Pojęcie momentu rozkładu

Niech X ma rozkład dyskretny. Dla $k \geq 2$ niech $Y = X^k$. Jeśli Y ma wartość oczekiwaną, to powiemy, że X ma moment rzędu k i piszemy

$$m_k = EY = E(X^k)$$

Uwaga. Zauważmy, że ponieważ $X = X^1$, EX można nazwać momentem rzędu 1, czyli

$$EX = m = m_1$$

Dalej będziemy rozważali tylko przypadki $k \in \{1,2\}$.

P.1. $X: \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array} \longrightarrow X^2 \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array}$,

dlatego $EX = E(X^2) = p$

P2 $X \in B(n,p)$, $n \geq 2$. Wtedy

$X^2(\Omega) = \{0, 1, 2^2, \ldots, n^2\}$, oraz

$P(\{\omega \in \Omega : X^2(\omega) = k^2\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Důkaz

$$m_2 = E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

(přeznačíme $k-1=j$)

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{n!}{j!(n-1-j)!} p^{j+1} (1-p)^{n-1-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} j \frac{n!}{j!(n-1-j)!} p^{j+1} (1-p)^{n-1-j} + np \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j}}_{np(p+1-p)^{n-1}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(j-1)!(n-1-j)!} p^{j+1} (1-p)^{n-1-j} + np = \text{(přezn. } j-1=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!(n-2-k)!} p^{k+2} (1-p)^{n-2-k} + np =$$

$$= n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} p^k (1-p)^{n-2-k}}_{=1} + np =$$

$n(n-1)p^2 + np$, čili $\boxed{E(X^2) = n(n-1)p^2 + np}$

P3 = Zad 1

$X \in P(\lambda)$, $\lambda > 0$. Sprawdzić, czy X ma drugi moment. Jeśli istnieje, to wyznaczyć go.

Dalej potrzebujemy modyfikacji 2-go momentu:

Niech X ma m_2. Bierzemy

(i) $X \longrightarrow X - m$ (centrowanie),

bowiem mamy

FAKT 1. Jeśli X ma drugi moment, to ma też pierwszy, ale nie na odwrót!

(ii) $X - m \longrightarrow (X-m)^2$ i wyznaczamy wartość oczekiwaną $E(X-m)^2$.

Wtedy liczbę tę oznaczamy $var(X) = \sigma^2$ i nazywamy wariancją zm. losowej X (albo jej rozrzutem).

Uwaga.

$$E(X-m)^2$$

średnie kwadratowe odchylenie

Tw 1 (Podstawowe tw. o wariancji).

Niech X ma m_2. Wtedy X ma wariancję oraz

$$var(X) = m_2 - m_1^2$$

Zad 2.

Uzasadnić wzór z Tw. 1.

P4. $X: \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ q & p \end{array}$

$$var(X) = m_2 - m_1^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

P5. $X \in B(n,p)$

Wiemy, że $EX = np$, $E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$

Stąd $var(X) = m_2 - m_1^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 =$

$= \underline{npq}$.

Zad 3. Oblicz $\mathrm{var}(X)$ dla $X \in \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Pojęcie niezależności zm. losowych.

Z modelu wiemy, że $A, B \in \Sigma$ są stochastycznie niezależne, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

Weźmy teraz dwie zm. losowe X, Y.

Niech $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}$,

$B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) < s\}$ dla $t, s \in \mathbb{R}$

Jeśli A, B są stochastycznie niezależne, to mówimy, że X i Y są stochastycznie niezależne.

Wtedy, jeśli X, Y mają wartości oczekiwane, to

$$E(XY) = (EX)(EY)$$

Tw2 (o wariancji)

Niech X, Y mają 2-gie momenty i będą stochastycznie niezależne. Wtedy

(i) $var(X+Y) = var(X) + var(Y)$

(ii) $\forall_c \; var(cX) = c^2 var(X)$

(iii) $var(X) \geq 0$

(iv) $var(X) = 0 \iff X = const.$

Uwagi. (i) i (ii) $\to$ jako Zad 4.

(iii) wynika wprost z def.

Zad 5.

Niech $X_0 : \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array}$, $n \geq 2$

oraz $X_1, X_2, \dots, X_n$ stochastycznie niezależne kopie X_0.

Bierzemy

$$X \overset{df}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n .$$

Udowodnić, że $X \in B(n,p)$.

Stąd dla $X \in B(n,p)$

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(X_1) + \mathrm{var}(X_2) + \dots + \mathrm{var}(X_n)$$

$$= \underbrace{pq + pq \dots pq}_{n}$$

$$= npq .$$

Dalej wyjaśnimy znaczenie $\mathrm{var}(X)$ w T. P.
Wcześniej rozszerzymy to pojęcie na przypadek rozkładów ciągłych.

Załóżmy X ma rozkład ciągły, f - funkcja gęstości tego rozkładu.

Def 1 (EX)

Jeśli istnieje całka (niewłaściwa!) $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$,

to mówimy, że X ma wartość oczekiwaną i oznaczamy ją

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$$

Uwaga. Podobnie jak wcześniej

$$m = m_1 = EX$$

wartość średnia 1-szy moment

Dalej prawdziwe jest tw. o liniowości operacji

$X \to EX$, bowiem $EX = \int_\Omega X\,dP$

P6 Niech $X \in \mathcal{J}([a,b])$.

Pamiętamy
$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a,b] \\ 0, & t \notin [a,b] \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} t \cdot 0\,dt}_{=0} + \int_{a}^{b} t \frac{1}{b-a}\,dt + \underbrace{\int_{b}^{+\infty} t \cdot 0\,dt}_{=0}$$

Zatem EX istnieje oraz
$$\underbrace{EX = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}}$$ → środek przedziału!

FAKT 2 (jako Zad 6)

Niech $X \in N(m, \sigma^2)$. Wtedy

$$EX = m$$

P.7. Weźmy $X \in W(\lambda)$, $\lambda > 0$, czyli

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \lim_{T \to +\infty} \int_{0}^{T} t\lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

ZAD 7.

Proszę dokończyć ten rachunek i pokazać, że

$$\boxed{EX = \frac{1}{\lambda}}.$$

Inne własności

1°. Zasada centrowania: $X \longrightarrow X - m$

$$E(X-m) = 0 \quad (\text{z liniowości}).$$

Np. $X \in N(m, \sigma^2)$, to $E(X-m) = 0$.

2°. Pojęcie k-tego momentu. Mamy podobne sytuacje jak dla zm. dyskretnych:

dla $k \geq 2$

$$X \longrightarrow X^k$$

Jeśli zm. losowa X^k ma wartość oczekiwaną, to piszemy

$$m_k = E(X^k)$$

$\hookrightarrow$ „k-ty moment".

Zatem $m = EX = m_1 = E(X^1)$.

3°. Z istnienia k-tego momentu wynika istnienie $k-1$-go, w szczególności jeśli $E(X^2)$ istnieje, to istnieje EX

(ale nie na odwrót!)

4°. Niech X ma 2-gi moment. Bierzemy

$$X \longrightarrow X-m \longrightarrow (X-m)^2$$

Jeśli istnieje m_2, to istnieje $E(X-m)^2$, nazywamy wariancją zm. losowej X.

$$var(X) = E(X-m)^2 = \sigma_X^2$$

5°. prawdziwe są tw. o wariancji #1 i #2 sformułowane dla przypadku rozkładów dyskretnych.

P.8. $X \in U([a,b])$. Sprawdzimy, czy X ma wariancję. Wystarczy zbadać, czy istnieje 2-gi moment. Bierzemy całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} t^2\cdot 0\,dt}_{0} + \int_{a}^{b} \frac{t^2}{b-a}\,dt + \underbrace{\int_{b}^{+\infty} t^2\cdot 0\,dt}_{0}$$

Zadm

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{3}t^3\Big]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2)}{3\cancel{(b-a)}} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Shut

$$\mathrm{var}(X) = m_2 - m_1^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{(a+b)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} =$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{3}(} \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Zad 8. Niech $X \in W(\lambda)$.

Pokazać, że $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$, a więc

$$var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$