Tematy i problemy obowiązujące na egzaminie poprawkowym z RPiSt na kierunku Informatyka, rok ak. 2020/2021

I. Podstawy - MPK

(1) Udowodnij, że dla $A, B \in \Sigma$

$$A \cap B \in \Sigma, \quad A \setminus B \in \Sigma$$

(2) Uzasadnij, że nie istnieje σ-ciało Σ złożone tylko z trzech zdarzeń.

(3) Udowodnij, że $\forall A, B \in \Sigma$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(4) Stosując wynik z zad (3), wyprowadź wzór na $P(A \cup B \cup C)$, $A, B, C \in \Sigma$

(5) Udowodnij, że z niezależności stochastycznej zdarzeń A, B wynika stochastyczna niezależność zdarzeń

(i) A^c, B

(ii) A^c, B^c

(6) W modelu produktowym

$$(\Omega,\Sigma,P)=(\Omega_1,\Sigma_1,P_1)\otimes(\Omega_2,\Sigma_2,P_2)$$

$$P(A_1\times A_2)=P_1(A_1)P_2(A_2).$$

Udowodnić, że zdarzenia

$A=A_1\times\Omega_2$, $B=\Omega_1\times A_2$ są

stochastycznie niezależne w (Ω,Σ,P).

II. Rozkłady dyskretne i ich własności

(1) $X\in B(n,p)$. Wyznaczyć rozkład $Y=\frac{X}{n}$

(2) X ma rozkład dyskretny. Metodą dystrybuanty określić $P(A)$, gdzie

(i) $A=\{\omega\in\Omega: a< X(\omega)\le b\}$

(ii) $A=\{\omega\in\Omega: a< X(\omega)< b\}$

(3) X ma rozkład

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\le 1{,}5\\ 0{,}25, & 1{,}5<t\le 3\\ 0{,}75, & 3<t\le 5\\ 1, & t>5\end{cases}$$

a) Obl. $P(\{\omega \in \Omega : 0{,}5 \leq X(\omega) < 2{,}5\})$

stosując wykresy F i d.

b) Znaleźć rozkład $Y = -2X+1$

(4) X ma rozkład

-2	-1	0	1	2
1/3	1/6	2/9	1/6	1/9

Oblicz $E(Y^2)$, $Y = 2X+1$

(5) $X \sim P(\lambda)$. Oblicz $E(X^2)$

(6) Udowodnić, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$ dla

$p \in (0,1)$

(7) Wiadomo, że $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ $(n \geq 2)$

gdzie: (i) $d(X_1) = \ldots = d(X_n)$: $\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array}$

(ii) są stoch. niezależne.

Oblicz $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\})$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

III Rozkłady ciągłe i ich własności.

(1) X ma rozkład

$$F(t)=\begin{cases} 0, & t\le 0 \\ \frac{1}{2}t, & 0<t\le 2 \\ 1, & t>2 \end{cases}$$

Oblicz f, a następnie $P(\{\omega\in\Omega : 0{,}5 < X(\omega) < 1.5\})$

(2) Uzasadnij, że

$$X\in \mathcal{J}([a,b]) \Rightarrow \frac{X-a}{b-a}\in \mathcal{J}([0,1])$$

(3) X ma f. gęstości $f(t)=\begin{cases} 2-2t & t\in[0,1] \\ 0, & t\notin[0,1] \end{cases}$

Skorzystaj z f i F oblicz

$$P(\{\omega\in\Omega : -1 < X(\omega) < 0{,}5\})$$

(4) $X\in \mathcal{J}([0,1])$. Znajdź rozkład $Y=\dfrac{1}{X+1}$

(5) X ma rozkład $F(t)=\begin{cases} 0, & t\le -1 \\ 1-t^2/2, & -1<t\le 0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$

Obl. $E(X^2)$

(6) $X \in N(m, \sigma^2)$, $m = -2{,}5$
$\sigma = 2$

Obl. $P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \leq 1{,}5\})$

(7) $X \in W(\lambda)$, $\lambda > 0$. Znaleźć rozkład
$Y = 1 - e^{-\lambda X}$

(8) Dla $X \in N(m, \sigma^2)$ wyznaczyć $E(X^2)$.

(IV) Nierówność Markowa-Czebyszewa.

(1) $X \in U([2,6])$. Oszacować metodą n. M. i Cz.
$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > 4{,}5\})$

(2) $X \in B(n, 0{,}75)$. Jaki musi być n, aby z pr. co najmniej $0{,}95$ pr. empiryczne odbiegało od pr. teor. o mniej niż $0{,}001$?

(3) Korzystając z n. Cz. dobrać ile razy należy rzucić kostką, aby pr. spełnienia nierówności
$\left| \frac{k_n}{n} - \frac{1}{6} \right| < 0{,}01$

gdzie k_n - l. wyrzuconych orzełków w n rzutach, będzie się różnić od 0,5

(4) Oszacować prawd.

$\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - EX| < 1\}$, jeśli

$\text{var}(X) = 0{,}02$

(V) C.T.G.

(1) $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$ - niez. zm. los. o rozkł. $J([1,2])$.

Metodą C.T.G. oszacować

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : 52 < \sum_{j=1}^{50} X_j < 98\right\}\right)$$

(2) $X_1, X_2, \ldots, X_{80} \in P(\lambda)$ i są niezależne $(\lambda = 3)$.

Oszacować

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \sum_{j=1}^{80} X_j(\omega) > 200\right\}\right)$$

(3) Zastosować C.T.G. dla rozkładu dwumianowego.

(4) Dla $n=300$, $p=0{,}25$ oszacować pr., że # sukcesów była mniejsza niż 250.

(5) Metodą C.T.G. oszacować

$$P(\{\omega\in\Omega: X=k\}),\quad X\in B(n,p).$$

$$k\in\{1,2,\ldots,n\}.$$

(V) Podstawy statystyki matem.

(1) Wiadomo, że $X \sim N(m,\sigma^2)$, $\sigma=2$.

Pobrano p.p. $(3{,}1,\ 3{,}5,\ 2{,}9,\ 2{,}7,\ 2{,}8)$

Na poziomie $\alpha=0{,}15$ estymować m.

(2) $X\sim N(m,\sigma^2)$, próba j.w.

Na poziomie $\alpha=0{,}1$ estymuj m

③ $X \in N(m, \sigma^2)$, próba j. v.
Na poziomie $\alpha = 0{,}2$ estymować σ^2.

④. Niech X jak w z. 1.
Dla $\alpha = 0{,}15$ zweryfikuj
$H_0: m = 3 \qquad H_1: m \neq 3$

⑤ $X \in N(m, \sigma^2)$.
Pobrano p. p.
$-1{,}5$, 0, $0{,}51$, $0{,}48$, $0{,}62$, $0{,}33$, $-0{,}33$,
$0{,}22$, $0{,}49$, $0{,}12$.
Dla $\alpha = 0{,}1$ zweryfikuj
$H_0: m = 0{,}35$, $H_1: m \neq 0{,}35$

6) $X \in N(m, \sigma^2)$. Pobrano p. p.
$2{,}01$, $1{,}99$, $2{,}2$, $3{,}51$; $1{,}75$; $1{,}66$,
$2{,}25$, $2{,}31$, $2{,}0$.
Dla $\alpha = 0{,}15$ zweryfikuj
$H_0: \sigma^2 = 0{,}2$, $H_1: \sigma^2 > 0{,}2$.