Materiały do Wykładu PMPiSt 22.10.2020
tryb ON-LINE

<u>Temat</u>: Model Probabilistyczny Kołmogorowa (MPK)
i jego własności. Przegląd wybranych MPK

Główni językiem aby przeprowadzić rozumowanie abstrakcyjne, zmierzające do skojarzenia ZL z jej modelem matematycznym.

<u>Stwierdzenie</u>

Każdemu ZL odpowiada co najmniej jeden model matematyczny zwany Modelem Probabilistycznym Kołmogorowa

$$ZL \longrightarrow MPK,$$

czyli obiekt (Ω, Σ, P), gdzie

(i) Ω jest zbiorem wszystkich wyników obserwacji $\omega \in \Omega$

(ii) Σ jest rodziną podzbiorów Ω, która ma własność σ-ciała.
Wtedy $A \in \Sigma$ nazywamy <u>zdarzeniem</u>

(iii) P jest funkcją określoną na Σ o wartościach w $[0,1]$,

$P: \Sigma \longrightarrow [0,1]$,

$\Sigma \ni A \longrightarrow P(A) \in [0,1]$

P – nazywamy <u>funkcją prawdopodobieństwa</u>,

a liczbę $P(A)$ – <u>prawdopodobieństwem zdarzenia</u>,

gdy:

(i) $\forall_{A \in \Sigma} \; P(A^c) = 1 - P(A)$

(ii) $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}_0\} \subset \Sigma$, $\underset{n \neq m}{A_n \cap A_m = \emptyset}$
$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} P(A_n)$$

<u>Uwagi</u> 1° Wtedy $P(\emptyset) = 0$ i $P(\Omega) = 1$

2° P jest f. monotoniczną, a więc

$\forall_{A, B \in \Sigma} \; A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

3° $\forall_{A, B \in \Sigma} \; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4° $\forall_{A, B \in \Sigma} \; A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

ZADANIE 1

Udowodnić własności 1–4.

Przykłady

1) Rzut pojed. monety: $\Omega = W$, $P = m$

2) Rzut 2 monetami

$$\Omega = \underbrace{\{0,1\}}_{=\Omega_0} \times \underbrace{\{0,1\}}_{=\Omega_0} \qquad (0 - \text{„Reszka"},\ 1 - \text{„Orzeł"})$$

$\omega = (\omega_1^0, \omega_2^0)$ $\qquad$ Ω_0 – rzut 1 monetą

$$P(\{\omega\}) = P_0(\{\omega_1^0\})\, P_0(\{\omega_2^0\}) \qquad \Sigma = P(\Omega)$$

3) Rzut n-monetami

$$\Omega = \underbrace{\Omega_0 \times \Omega_0 \times \ldots \times \Omega_0}_{n}, \qquad \Sigma = P(\Omega)$$

ω – ciąg binarny dł. n

$P_0(\{1\}) = p$, $P_0(\{0\}) = q = 1 - p$, $p \in (0,1)$

$P(\{\omega\}) = p^k q^{n-k}$, gdzie

$k = \#\{j : \omega_j^0 = 1\}$, $\omega = (\omega_1^0, \omega_2^0, \ldots, \omega_n^0)$

ZAD 2 Uzasadnić, że $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$

ZAD. 3 Opisać najmniejszy MPK.

Przegląd wybranych MPK (Ω, Σ, P).

1°. (Pierwszy z historycznego pkt. widzenia)
– Model DYSKRETNY.

$\Omega \stackrel{df}{=} \{\omega_n,\ n \in N_0 \subset N\}$ – zb. przeliczalny

$\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ – każdy $A \subset \Omega$ jest zdarzeniem.

$$P(A) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ p_n, & A = \{\omega_n\},\ n \in N_0, \end{cases}$$

gdzie $p_n \in (0,1)$ i $\sum_{n \in N_0} p_n = 1$

Wtedy dla każdego $A = \bigcup_{j \in I} \{\omega_j\}$,

$P(A) = \sum_{j \in I} P(\{\omega_j\})$.

Uwagi 1°. Gdy $|N_0| = n$ (dyskretny skończony)

Wtedy $|P(\Omega)| = 2^{|N_0|} = 2^n$

W szczególności, gdy

$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, $np = 1$

i dlatego $p = \frac{1}{n}$

Wówczas (dlaczego?)

ZAD 4 $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ – jest to pierwszy wzór na prawdop. zwany wzorem klasycznym

Mamy wtedy, że MPK jest dyskretny i jednorodny

Dwa ważne przykłady MPK dyskretnego

a) $B(n,p)$ – dwumianowy (Bernoulliego)

$n \geq 2$, $p \in (0,1)$ dane, np. $B(100, 0{,}7)$

Wtedy:

$\Omega = Bin_n$ – wszystkie ciągi binarne dł. n

$\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$.

Jeśli $\omega = (b_1, b_2 \ldots, b_n)$, $b_j \in \{0,1\}$, to

$P(\{\omega\}) = p^k(1-p)^{n-k}$,

$k = \# \{j : b_j = 1\}$.

Dla $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, niech

$S_k = \{\omega \in \Omega : \# \{j : b_j = 1\} = k\}$.

Udowodnić, że

ZADS $P(S_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Zauważ, że

$\Omega = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$, oraz

$\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ - partycja.

Mamy

$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n} S_k\right) = \sum_{k=0}^{n} P(S_k) =$

$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$

ZAD. 6

Rzucamy kostką do gry (symetryczną) 100 razy w sposób niezależny. Sukcesem jest wypadnięcie „6". Oblicz prawd., że odniesiemy 50 sukcesów.

b) $P(\lambda)$ – model Poissona, gdzie $\lambda > 0$.

$\Omega \overset{df}{=} \{0, 1, 2 \ldots\}$ – całkowite nieujemne

$\Sigma = P(\Omega)$

$\omega \in \Omega$, $P(\{\underset{\substack{\parallel \\ k}}{\omega}\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

ZAD. 7. Udowodnić, że $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

II Model warunkowy.

Niech dany będzie MPK: (Ω, Σ, P).

Oznacza to, że dostajemy jakieś ZL.

(ZL)

MOIK

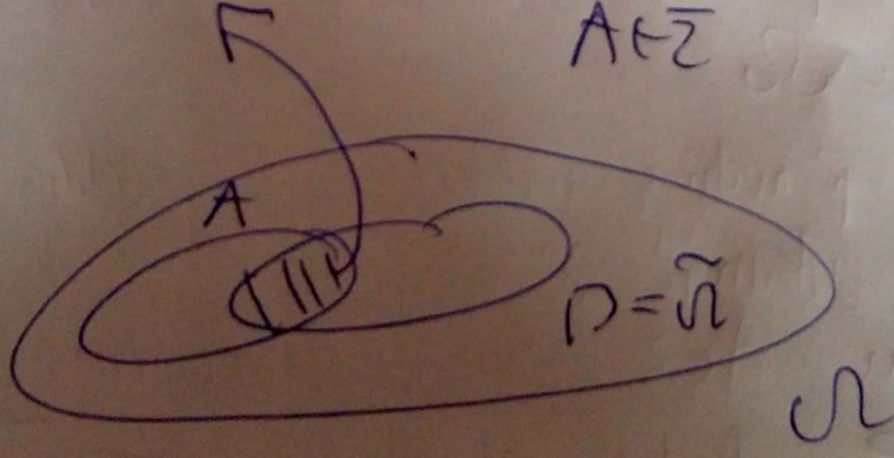
(Ω, Σ, P)

(obserwator)

Przypuśćmy, iż otrzymaliśmy dodatkową informację w postaci zdarzenia $B \in \Sigma$, $P(B) > 0$.
Jak teraz będzie wyglądać obserwacja?.
Będzie efektem relatywizacji (względem B):
$(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{P})$, gdzie

$\tilde{\Omega} = B$,

$$\tilde{A} \in \tilde{\Sigma} \equiv \exists_{A \in \Sigma} \; \tilde{A} = A \cap B$$



ZAD 8 Udowodnić, że $\tilde{\Sigma}$ jest σ-ciałem

Mówimy wtedy, że $\tilde{A}$ jest śladem A na B
(ang. TRACE)

$$\tilde{P}(\tilde{A}) \stackrel{df}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ – nazywamy prawd. warunkowym.

Piszemy też $\tilde{P}(\tilde{A}) = P(A \mid B)$
i czytamy „prawdop. A pod warunkiem B"

ZAD 9. Uzasadnić, że $\tilde{P}$ ma własności funkcji prawdopodobieństwa.

Problem. Kiedy $P(A) = \tilde{P}(\tilde{A})$

ZAD 10 Uzasadnić, że
$$P(A) = \tilde{P}(\tilde{A}) \iff P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Ostatni warunek jest b. ważny w T.P., oznacza że zdarzenia A i B są stochastycznie niezależne. (st. n.)

ZAD 11

A, B są st. n. Udowodnić, że

(i) A^c, B

(ii) A^c, B^c również.

TW. (wzór BAYESA)

Niech $P(A)P(B) > 0$.

Wtedy $P(A|B) = P(B|A)\frac{P(A)}{P(B)}$

ZAD 12 Udowodnić TO.

Tw. (o prawd. całkowitym)

Niech dana będzie partycja

$\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ Ω, gdzie

$P(B_j) > 0$, $j = 1, 2 \ldots m$.

Wtedy $\forall A \in \Sigma$

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j) P(B_j)$$

ZAD 12

Udowodnić ten wzór.

ZAD 13

Zadania ze zbioru.

III Model PRODUKTOWY

Zacznijmy od przypadku $n=2$:

dane są dwa ZL

ZL_1 $\qquad\qquad$ ZL_2

$(\Omega_1, \Sigma_1, P_1)$ $\qquad$ $(\Omega_2, \Sigma_2, P_2)$

$$ZL = ZL_1 \times ZL_2$$

(Ω, Σ, P), gdzie

$\Omega \overset{df}{=} \Omega_1 \times \Omega_2$

$\Sigma = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, czyli

$A_1 \in \Sigma_1,\ A_2 \in \Sigma_2 \Rightarrow A_1 \times A_2 \in \Sigma$

$P(A_1 \times A_2) \overset{df}{=} P_1(A_1) P_2(A_2)$

<u>Zad 13</u>

Uzasadnić, że $B(n,p)$ jest modelem produktowym (dla $n=2$).

I ogólnie

$\mathcal{Z}L_1 \quad \mathcal{Z}L_2 \quad \dots \quad \mathcal{Z}L_n$

$(\Omega_1, \Sigma_1, P_1) \quad (\Omega_2, \Sigma_2, P_2) \quad (\Omega_n, \Sigma_n, P_n)$

$$\mathcal{Z}L = \mathcal{Z}L_1 \times \mathcal{Z}L_2 \times \dots \times \mathcal{Z}L_n$$

$$(\Omega, \Sigma, P)$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$$

$$P(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P_1(A_1) P_2(A_2) \cdots P_n(A_n)$$

Zad 15. Uzasadnij, że $D(n,p)$ jest modelem produktywym.

Uwaga. Weźmy $n=2$ i

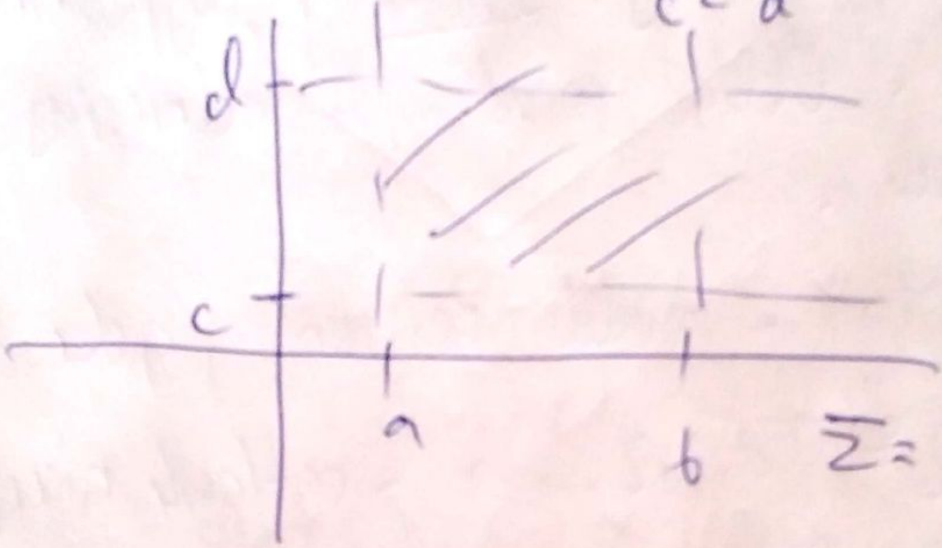
$$A = A_1 \times \Omega_2, \quad B = \Omega_1 \times A_2$$

ZAD 16 Pokaż, że A i B są niezależne.

(1,1)

(IV) Model geometryczny ($d=2$)

$\Omega = [a,b]\times[c,d]$, $a<b$, $c<d$

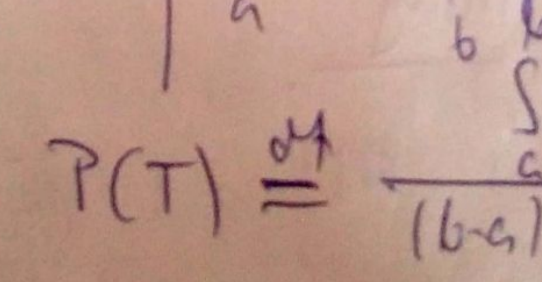


$\Sigma = \mathcal{B}_{[a,b]\times[c,d]}$

Typowe zdarzenie

$T = \{(x,y)\in\Omega:\ d(x)\le y\le g(x)\}$, gdzie

$d, g: [a,b]\to[c,d]$ f. ciągłe



Wtedy $P(T) \overset{df}{=} \dfrac{\int_a^b (g(x)-d(x))\,dx}{(b-a)\times(d-c)}$

ZAD 17. Podręcznik str. 26 i 27.

(14)