Materiał do wykładu PMPiM 26.11.2020

Część 1

<u>Temat</u>. Nierówności MARKOWA i CZEBYSZEWA – interpretacja stochastyczna wartości oczekiwanej.

<u>Wprowadzenie</u>.

Zacznijmy od podsumowania dotychczasowych wykładów. Punktem centralnym T.P. jest <u>zjawisko losowe</u> ZL i proces jego obserwacji, na który składa się:

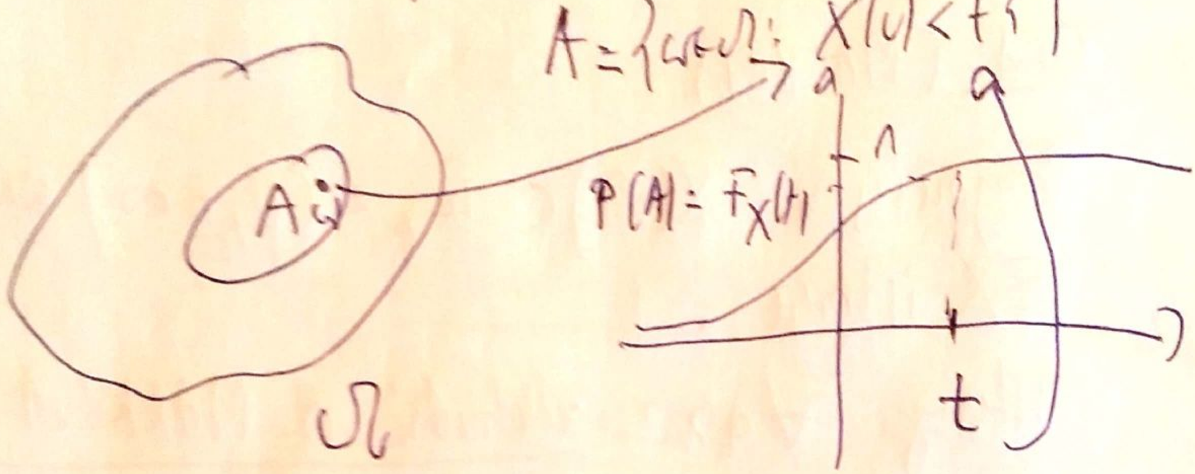
(i) MPK – model prob. Kołmogorowa (Ω, Σ, P)

(ii) interpretacja tego modelu – <u>zmienna losowa</u>.

Połączenie (i) & (ii) prowadzi do tzw. R.P. – <u>rozkładu prawdopodobieństwa</u>, którego podstawowym opisem jest <u>pojęcie dystrybuanty</u>, czyli funkcja F_X

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow P(\{\omega\in\Omega : X(\omega) < t\}) \in [0,1]$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad F_X(t)$$

To za pomocą F_X dochodzi do „transportu" zjawiska losowego ze środowiska MPK na grunt liczb rzeczywistych,



zarówno pod względem jakościowym jak i ilościowym.

Ze względów „technicznych" zakres zmiennych X ograniczymy do dwóch typów:

a) X typu dyskretnego, której F_X jest f. schodkową oraz ma swoją interpretację w postaci tzw. dyskretnego rozkładu prawd. g_X, który w przypadku skończonym sprowadza się do tabelki

$$d_X : \begin{array}{c|c|c|c|} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array},$$

gdzie $X(\Omega) = \{x_1, x_2 \dots, x_n\}$

$$\forall_{1 \le k \le n} \; P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}) = p_k \in (0,1)$$

b) X typu całkowicie nieciągłego, czyli ciągłego, wtedy F_X jest różniczkowalna, istnieje więc

$f_X = F_X'$ oraz → f. gęstości rozkładu

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}) = F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du$$

Dla X typu a) lub b) wprowadzamy pojęcie $m = EX$ - wartości oczekiwanej i $\sigma^2 = var(X)$ - wariancji

Z punktu widzenia matematyki

$EX = \int_\Omega X\,dP$ - „całka z X po Ω względem P"

Umiemy obliczyć EX zarówno dla zmiennej dyskretnej jak i ciągłej, gdzie

a) $EX = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} x_k p_k$

b) $EX = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)\, dt$.

Ponadto, jeśli istnieje $E(X^2)$ (II-gi moment), to istnieje EX oraz

$$\sigma_X^2 = E(X-m)^2 = E(X^2) - (EX)^2 = m_2 - m_1^2.$$

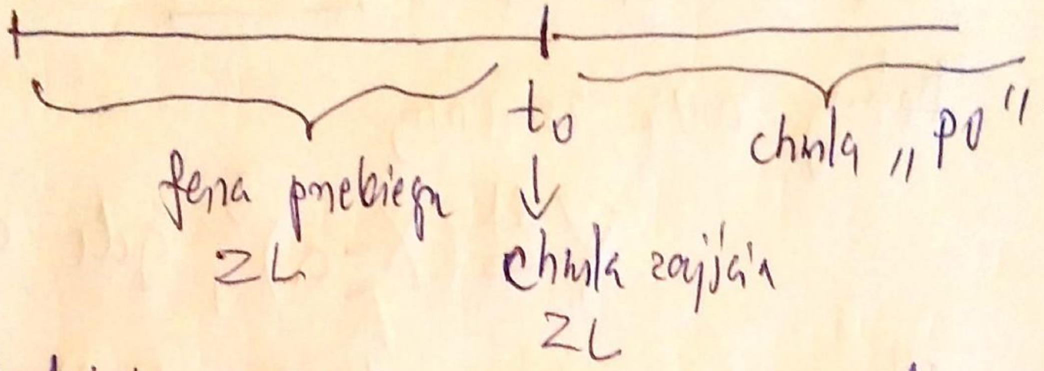
PROBLEM. Dlaczego m_X oraz σ_X^2 są ważne w T.P.?

Zacznijmy od kilku uwag

* Jak wiemy cała teoria służy do opisu ZL. Weźmy na chwilę dyskretne ZL, czyli możemy mieć sytuację: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}) = p_k \in (0,1)$

Spójrzmy na przebieg ZL z perspektywy upływu czasu



a) Do chwili t_0 nie wiemy na pewno co wydarzy się (wykluczamy, że się nie uda!)

Mamy tylko: „zaobserwujemy X_k z prawdopodobieństwem p_k", $k=1,2\ldots,n$

b) W chwili t_0 i „po" znamy wynik obserwacji ZL, który przebieg zakończył się.

Z punktu widzenia aplikacji T.P., ocena wyniku obserwacji musi zajść dla chwili $t < t_0$, bowiem najpóźniej w chwili t_0 trzeba będzie (na podstawie tej oceny) podjąć decyzję mającą wpływ na zachowanie się UKŁADU

W każdym to ZL zachodzi.

Pojawia się problem, jak rozumieć wyniki obserwacji, bowiem alternatywa dana tabelką

x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_1	p_2		p_n

oznacza, że potrzebne jest kryterium wyboru.

Sytuacja wygląda jeszcze bardziej nieczytelnie, gdy X ma rozkład ciągły, bowiem wtedy

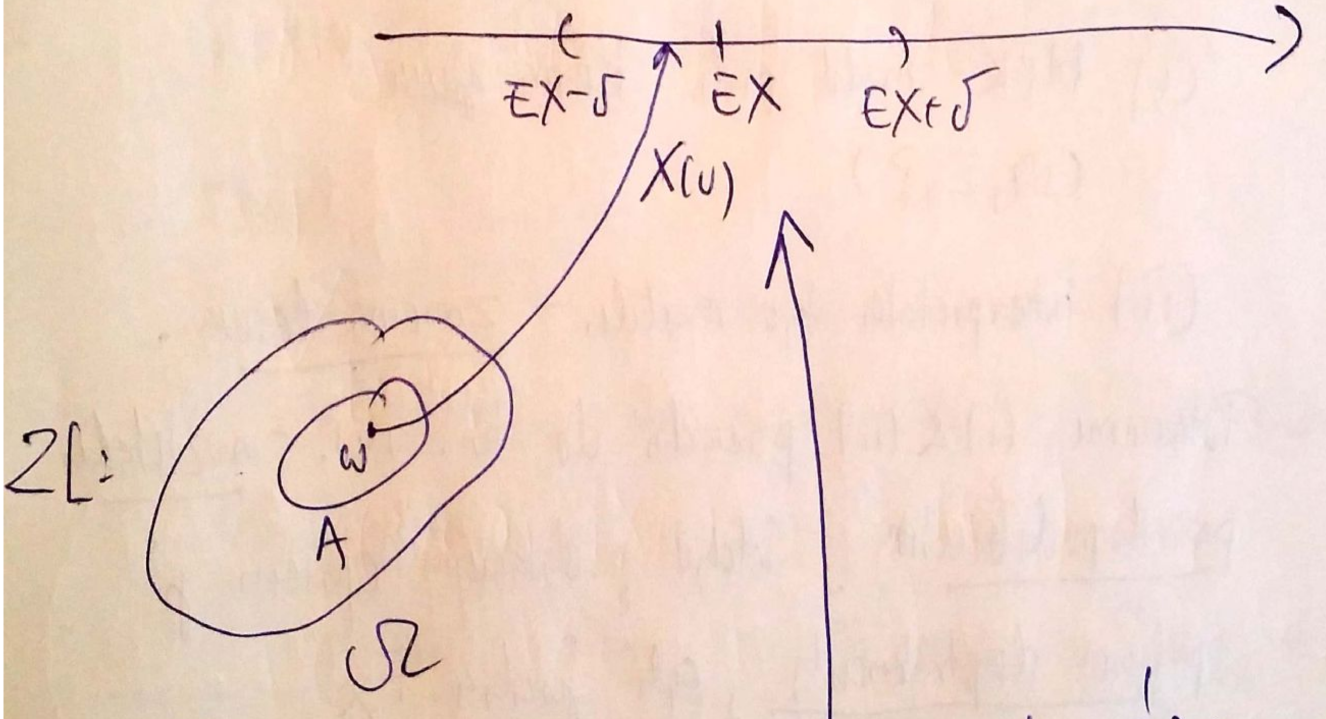
$$\forall_{t_0 \in \mathbb{R}} \; P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = t_0\}) = 0 \quad (!!!),$$

zatem w tym przypadku pytanie się o to „co zaobserwujemy" w rozumieniu zdarzenia $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = t_0\}$ wręcz nie ma sensu, bo

Jak pokażemy dalej zasygnalizowany wyżej problem rozwiązuje pojęcie m_X i σ^2_X.

Dokładniej, pokażemy że jeśli X ma drugi moment, a więc ma oba parametry: m_X i σ^2_X, to ocena (do chwili to) wyników obserwacji ZL polega na tym, że:

(*) $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \; P(\{\omega\in\Omega: |X(\omega)-EX|<\delta\}) \geq 1-\varepsilon$,



w poniżej mam oceniać wyniki obserwacji „ŚREDNIO", czyli zastąpić $X(\omega)\in\mathbb{R}$ liczbą EX, kontrolując (*) efekt „rozproszenia"

Aby wykazać, że tak można potrzebne są dwie nierówności: MARKOVA i Czebyszewa.

Nierówność MARKOVA

Tw 1 (MARKOV)

Przypuśćmy, że $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ oraz EX istnieje.

Wtedy $\forall a > 0$ zachodzi n. MARKOVA

$$(\ast\ast) \quad P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} EX.$$

Dowód

Przypadek dyskretny: z założenia

$$X(\Omega) = \{a_n \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}\}, \quad P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_n\}) = p_n$$

Mamy kolejno dla $a > 0$:

$$EX = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n p_n \geq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 : \\ a_n \geq a}} a_n p_n \geq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ a_n \geq a}} a p_n =$$

$$= a \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ a_n \geq a}} p_n = a P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\}),$$

co daje $(\ast\ast)$.

Zauważ, że rachunek jest TRYWIALNY!

Weźmy dowolny przykład X ciągły. Dla $a>0$ dostaniemy

$$EX = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)\,dt \geq \int_{\{t:\,t\geq a\}} t f_X(t)\,dt \geq$$

$$\int_{\{t:\,t\geq a\}} a f_X(t)\,dt = a \int_{\{t:\,t\geq a\}} f_X(t)\,dt = aP(\{\omega\in\Omega:\, X(\omega)\geq a\})$$

zatem też

Weźmy kilka przykładów.

P.1. $X \in W(\lambda)$, $\lambda>0$. Weźmy $a=\lambda$.

Wtedy z $(\ast\ast)$ (dlaczego?)

$$P(\{\omega\in\Omega:\, X(\omega)\geq\lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda}EX = \frac{1}{\lambda^2}$$

ZAD.1

Zilustruj P.1 graficznie!

P2. $X \in B(n, p)$

Wtedy $\forall k \in \{1, 2, \dots n\}$

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq k\}) \leq \frac{1}{k} \cdot np.$$

Jeśli wtedy tutaj k oznacza # „sukcesów"

Zatem jeśli $k \longleftrightarrow 50\%$, czyli $k = n/2$,

to „prawd., że osiągniemy co najmniej 50% sukc.

w serii niezależnych prób ~~[illegible]~~

z prawd. sukcesu p" jest nie większe od 2p.

ZAD2.

Pokazać zastosowanie N.M. dla rozkładu

normalnego.

Nierówność Czebyszewa.

Niech teraz X ma 2-gi moment oraz $X \neq$ const.

Definiujemy nową zmienną

$$Y \stackrel{df}{=} (X-a)^2, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R} \text{ - ustalone.}$$

Wtedy Y spełnia założenia N.M. (dlaczego?)

Zatem $\forall t > 0$ z $(**)$ mamy

$$P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \geq t^2\}) \leq \frac{1}{t^2} EY.$$

Jeśli teraz skorzystamy z def Y, to

$$P(\{\omega \in \Omega : (X(\omega)-a)^2 \geq t^2\}) \leq \frac{1}{t^2} E(X-a)^2,$$ co

równoważnie oznacza, że

$$P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)-a| \geq t\}) \leq \frac{1}{t^2} E|X-a|^2.$$

Niech teraz

$a = m = EX$ oraz za t

weźmy $t\sigma$, gdzie $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Wtedy ostatnia nierówność oznacza, iż

$$(\#) \quad P(\{\omega\in\Omega : |X(\omega)-m| \geq t\sigma\}) \leq \frac{1}{t^2\sigma^2} E(X-m)^2$$

$$= \frac{1}{t^2\sigma^2}\sigma^2 = \frac{1}{t^2}.$$

Tw. 2 (Czebyszew).
Niech $X \neq$ const i ma 2-i moment,
$m = EX$, $\sigma^2 = var(X)$.
Wtedy zachodzi $(\#)$, czyli

$(\ast\ast\ast)$

$$\forall_{t\in\mathbb{R}_+} \quad P(\{\omega\in\Omega : |X(\omega)-m| \geq t\sigma\}) \leq \frac{1}{t^2}$$

//