Materiały do wykładu PM1.87, 7.01.2021

Temat: Estymacja przedziałowa c.d.

II Dla P i jej cechy X mamy:

- PP. $(x_1, x_2 .. x_n) = (X_1, X_2 .. X_n)(\omega_0)$
- znany wynik kroku 3: $X \in N(m, \sigma^2)$, oba parametry są nieznane, estymujemy m
- ustalony poziom istotności $\alpha \in (0,1)$.

Pokażemy jak teraz skonstruować statystyki Z_1, Z_2:

(i) $Z_1(\omega) < Z_2(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$

(ii) $P(\{\omega \in \Omega : Z_1(\omega) < m < Z_2(\omega)\}) = 1 - \alpha$ (*)

Ponieważ σ^2 nie jest znane, nie możemy skorzystać z own. sytuacji I. Okazuje się, że w takiej sytuacji należy skorzystać z rozkładu t-Studenta.

Definiujemy odpowiednio:

$$Z_1 = \bar{X}_n - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} \qquad \left(S = \sqrt{S^2}\right)$$

$$Z_2 = \bar{X}_n + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}},$$

gdzie t_α (zależy od α) dobieramy tak, aby zachodziło (*)

Mamy kolejno:

$$(*) \iff P\left(\left\{\omega\in\Omega: \bar{X}_n(\omega) - t_\alpha \frac{S(\omega)}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{X}_n(\omega) + t_\alpha \frac{S(\omega)}{\sqrt{n-1}}\right\}\right) = 1-\alpha$$

$$\iff P\left(\left\{\omega\in\Omega: -t_\alpha < \underbrace{\frac{\bar{X}_n(\omega) - m}{S(\omega)}\sqrt{n-1}}_{t_{n-1}(\omega)} < t_\alpha\right\}\right) = 1-\alpha$$

$$\iff P\left(\left\{\omega\in\Omega: |t_{n-1}(\omega)| < t_\alpha\right\}\right) = 1-\alpha,$$

co oznacza, że

$$(**)\quad P\left(\left\{\omega\in\Omega: |t_{n-1}(\omega)| > t_\alpha\right\}\right) = \alpha$$

i możemy skorzystać z <u>wart. krytycznych</u> rozkładu t-Studenta o <u>n-1 st. swobody</u>

Zatem wartości liczbę t_α pojawiające się w def. Z_1, Z_2 są wartościami krytycznymi statystyki t-Studenta.

Przykład 1

Weźmy dane z sytuacji I:

PP. $(2.23, 2.12, 1.97, 2.01) = (X_1, X_2, X_3, X_4)(\omega_0)$

$\alpha = 0{,}05$

Z tablicy rozkładu t-Studenta o 3-st. swobody $(n-1 = 4-1 = 3)$

dostajemy dla (**)

$P(\{\omega \in \Omega : |t_3(\omega)| > t_\alpha\}) = 0{,}05 \Rightarrow$

$t_\alpha = 3{,}182$

Z poprzedniego przykładu

$\overline{X}_4(\omega_0) = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 2{,}083$

$S = S(\omega_0) = \sqrt{\frac{1}{4}\left((2{,}23 - 2{,}083)^2 + (2{,}12 - 2{,}083)^2 + (1{,}97 - 2{,}083)^2 + (2{,}01 - 2{,}083)^2\right)} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1$

stąd

$$\mathrm{int}\left(Z_1(\omega_0), Z_2(\omega_0)\right) =$$

$$= \left(\bar{X}_n(\omega_0) - t_\alpha \frac{S(\omega_0)}{\sqrt{n-1}}, \bar{X}_n(\omega_0) + t_\alpha \frac{S(\omega_0)}{\sqrt{n-1}}\right)$$

$$= (1{,}899,\ 2{,}267) \text{ z prawd. } \underline{\underline{1-\alpha = 0{,}95}}$$

<u>Uwaga</u> Z porównania wyników obu sytuacji widać, że są one <u>zbliżone</u>!

<u>III</u> Załóżmy teraz, że dystrybuanta empiryczna <u>nie</u> pozwala ustalić typu rozkładu cechy X. Wiemy jednak, że EX i $\mathrm{var}(X)$ istnieją. Pokażmy jak można <u>estymować m</u>.

Na wstępie należy zaznaczyć, że tym razem PP powinna mieć długość $n \geq 100$.

Z podanych niżej informacji zrozumiemy dlaczego!

Zauważmy, iż:

1°. $\frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$,

co wynika z C.T.G.

2°. $E(\hat{S}^2) = var(X)$

3°. $\hat{S}^2 \xrightarrow{p.w.} \sigma^2$ z MPWL Borela.

Wobec tych powodów n musi być odpowiednio duże. Praktyka pokazuje, iż powinno zachodzić

$n \geq 100$ (co najmniej).

Wtedy dla $\alpha \in (0,1)$ statystyki Z_1, Z_2 definiujemy jak niżej:

$$Z_1(\omega) = \bar{X}_n(\omega) - u_\alpha \frac{\hat{S}(\omega)}{\sqrt{n}}$$

$$Z_2(\omega) = \bar{X}_n(\omega) + u_\alpha \frac{\hat{S}(\omega)}{\sqrt{n}}, \text{ gdzie}$$

$\hat{S} = \sqrt{\hat{S}^2}$, gdzie liczbę u_α wyznaczamy

z wz. (*), czyli

$$P(\{\omega \in \Omega : Z_1(\omega) < m < Z_2(\omega)\}) = 1 - \alpha$$

Po podstawieniu dostajemy

$$P(\{\omega \in \Omega : \bar{X}_n(\omega) - u_\alpha \frac{\hat{S}(\omega)}{\sqrt{n}} < m < \bar{X}_n(\omega) + u_\alpha \frac{\hat{S}(\omega)}{\sqrt{n}}\}) = 1 - \alpha,$$

gdzie założenia:

Z.P. $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (X_1, X_2, \dots, X_n)(\omega_0)$, $\underline{\underline{n \geq 100}}$

Po przekształceniach dostajemy

$$P(\{\omega \in \Omega : -u_\alpha < \underbrace{\frac{\bar{X}_n(\omega) - m}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}}}_{V_n} < u_\alpha\}) = 1 - \alpha$$

Z uwagi $1^\circ - 3^\circ$, statystyka Y_n ma własności

$$d_{Y_n} \approx \Phi \,.$$

$$\left(\frac{\eta}{TY_n} \right)$$

Zatem mamy przybliżenie:

$$\Phi(n_\alpha) - \Phi(-n_\alpha) \cong 1-\alpha \iff$$

$$2\Phi(n_\alpha) - 1 \cong 1-\alpha \equiv$$

$$\boxed{\Phi(n_\alpha) \cong 1-\frac{\alpha}{2}} \,,$$

a ne n_α mamy uzyskać z tablicy $N(0,1)$.

Pokażmy teraz wszystko na przykładzie.

Przykład 2.

Przypuśćmy, że pobrano $(x_1, x_2, \ldots, x_{100}) = (X_1, \ldots, X_{100})(\omega_0)$ takie, że

$$\bar{x}_{100} = \bar{X}_{100}(\omega_0) = 2{,}0031$$

$$\hat{s} = \hat{S}(\omega_0) = 0{,}1967$$

dla $\alpha = 0{,}05$.

Wtedy $u_\alpha = 1{,}96$ więc mamy

$$m \in \left(\bar{X}_{100}(\omega_0) - u_\alpha \frac{\hat{S}(\omega_0)}{\sqrt{100}}, \; \bar{X}_{100}(\omega_0) + u_\alpha \frac{\hat{S}(\omega_0)}{\sqrt{100}} \right)$$

$$= \left(2{,}0031 - 1{,}96 \, \frac{0{,}1967}{10}, \; 2{,}0031 + 1{,}96 \, \frac{0{,}1967}{10} \right)$$

Ostatecznie

$$m \in (1{,}965, \; 2{,}042) \text{ z p. } 0{,}95$$

Na zakończenie tej części wnioskowania statystycz-
t. estymacji, pokażemy jak estymuje się σ^2.

W tym celu niech $X \in N(m, \sigma^2)$, gdzie σ^2 nieznane.

Niech $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)(\omega)$ p.p.

oraz $\alpha \in (0,1)$.

Pokażemy jak skonstruować Z_1, Z_2, że

$$P(\{\omega \in \Omega : Z_1(\omega) < \sigma^2 < Z_2(\omega)\}) = 1 - \alpha$$

Bierzemy: $Z_1 = \dfrac{nS^2}{z_1}$, $Z_2 = \dfrac{nS^2}{z_2}$, gdzie

z_1, z_2 wyznaczymy z warunku powyżej

Dostaniemy kolejno:

$$P(\{\omega \in \Omega : \frac{nS^2}{z_1} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{z_2}\}) = 1 - \alpha$$

$\Leftrightarrow$

$$P(\{\omega\in\Omega:\ z_2 < \frac{nS^2}{\sigma^2} < z_1\}) = 1-\alpha$$

Wiemy, że $\chi^2_{n-1} = \frac{nS^2}{\sigma^2}$, więc powyższa równość oznacza, że

$$P(\{\omega\in\Omega:\ z_2 < \chi^2_{n-1}(\omega) < z_1\}) = 1-\alpha$$

W tablicy χ^2 mamy wartości krytyczne, zatem powyższą równość rozpisujemy następująco

$$P(\{\omega\in\Omega:\ \chi^2_{n-1}(\omega) < z_2\}) = \alpha/2 \equiv$$

$$\boxed{P(\{\omega\in\Omega:\ \chi^2_{n-1}(\omega) > z_2\}) = 1-\alpha/2}$$

oraz $P(\{\omega\in\Omega:\ \chi^2_{n-1}(\omega) < z_1\}) = 1-\alpha/2$

$$\Longleftrightarrow \boxed{P(\{\omega\in\Omega:\ \chi^2_{n-1} > z_1\}) = \alpha/2}$$

Oznacza to, iż liczby z_1, z_2 są wartościami krytycznymi dla r. χ^2 o $n-1$ st. swobody.

Następny przykład.

Przykład 3.

Dla $\alpha = 0{,}1$ i P.P.

$(-0{,}01,\ 0{,}19,\ 0{,}09,\ -0{,}18,\ 0{,}40) =$

$(X_1, X_2, \ldots, X_5)(\omega_0)$

cechy X P.G., gdzie $X \in N(m, \sigma^2)$

Stąd $n-1 = 5-1 = 4$, zatem

dla z_2 mamy:

$1 - \alpha/2 = 0{,}95$ i $z_2 \cong 0{,}711$

dla z_1 mamy:

$\alpha/2 = 0{,}05$, $z_1 \cong 9{,}488$

$S^2(\omega_0) = s_*^2 = 0{,}0377$, więc

$$Z_1(v_0) = \frac{nS^2(v_0)}{z_1}\Big|_{n=5} = \frac{5 \cdot 0{,}0377}{9{,}488} \approx 0{,}0002$$

$$Z_2(v_0) = \frac{nS^2(v_0)}{z_2}\Big|_{n=5} = \frac{5 \cdot 0{,}0377}{0{,}711} \approx 0{,}267.$$

Odpowiedź:

$\sigma^2 \in (0{,}0002,\ 0{,}267)$

z p. 0,9