Tematy i problemy obowiązujące na e. podstawowym
do kursu PMP na k. Informatyka, 2023/2024

19.01.2024

I. Podstawy – MPK

① Udowodnić, że dla (Ω, Σ, P)

$A, B, C \in \Sigma$, to $A \cap B \in \Sigma$, $A \nabla B \in \Sigma$

$A \cap B \cap C \in \Sigma$

② Uzasadnić, że jeśli w MPK

$\{A, B, C\} \subset \Sigma$, to $|\Sigma| \geqslant 4$

③ Pokazać, że $\forall A, B \in \Sigma$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

④ Stosując wynik z z.3, wyprowadzić wzór dla

$P(A \cup B \cup C)$, $A, B, C \in \Sigma$

⑤ Wiadomo, że A, B są zdarzeniami niezależnymi.
Uzasadnić, że:

(i) A^c, B

(ii) A^c, B^c również.

(6) Niech
$$(\Omega,\Sigma,P) := (\Omega_1,\Sigma_1,P_1)\otimes(\Omega_2,\Sigma_2,P_2),$$
gdzie $P(A_1\times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2)$

Uzasadnij, że zdarzenia
$$A \stackrel{df}{=} A_1\times\Omega_2\,,\quad B=\Omega_1\times A_2$$
są stochastycznie niezależne.

(7) Kiedy $P(A|B)=P(B|A)$. Odp. uzasadnij.

<u>II</u> Rozkłady dyskretne i ich własności.

(1) $X\in B(n,p)$. Wyznacz rozkład $Y = \frac{X}{n}$

(2) Niech $d(X_j) = d(X_0)$, $j=1\ldots n$,
gdzie $X_1,\ldots,X_n$ stochastycznie niezależne, oraz:
$$d(X_0) \doteq \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array}\,,\quad q=1-p.$$

Udowodnij, że $Y = X_1+X_2+\ldots+X_n$
ma rozkład $B(n,p)$.

(3) X ma rozkład dyskretny. Metodą dystrybuanty obliczyć $P(A)$, gdzie

(i) $A = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\}$

(ii) $A = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\}$

Rozważ przypadki, kiedy $a, b \in X(\Omega)$.

(4) X ma rozkład

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1{,}5 \\ 0{,}25 & 1{,}5 < t \leq 3 \\ 0{,}75 & 3 < t \leq 5 \\ 1 & t > 5 \end{cases}$$

a) Obliczyć metodą F i d

$P(\{\omega \in \Omega : 0{,}5 \leq X(\omega) < 2{,}5\})$

b) Znaleźć rozkład $Y = e^{-X} + 1$

(5) X ma rozkład

-2	-1	0	1	2
1/3	1/6	2/9	1/6	1/9

Obliczyć $E(Y^2)$, gdzie $Y = 2X + 1$

⑥ $X \in P(\lambda)$. Oblicz $E(X^2)$

⑦ Uzasadnić, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1, \quad p \in (0,1)$$

nie stosując metody wzoru dwumianowego.

III Rozkłady ciągłe i ich własności.

① X ma rozkład
$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{1}{2}t, & 0 < t \le 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

Oblicz f, a następnie

$$P(\{\omega \in \Omega : 0{,}5 < X(\omega) < 1{,}5\})$$

Zilustruj wykresy.

② Uzasadnić, że

$$X \in U([a,b]) \Rightarrow \frac{X-b}{b-a} \in U([0,1]).$$

dla $a < b$.

③ X ma gęstość
$$f(t) = \begin{cases} 2-2t, & t \in [0,1] \\ 0, & t \in [0,1] \end{cases}$$

Znajdź F. Metodą f i F oblicz

$$P(\{\omega \in \Omega : -1 < X(\omega) < 0{,}5\}).$$

④ $X \in \mathcal{J}([0,1])$. Znaleźć rozkład $Y = \frac{1}{X+1}$

⑤ X ma rozkład

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1 \\ 1 - \frac{t^2}{2}, & -1 < t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Obliczyć $E(X^2)$.

⑥ $X \in N(m, \sigma^2)$, $m = -2{,}5$, $\sigma = 2$

Obliczyć $P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \leq 1{,}5\})$

⑦ Niech $X \in W(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Znaleźć rozkład $Y = 1 - e^{-\lambda X}$.

⑧ $X \in N(m, \sigma^2)$. Wyznaczyć $E(X^2)$.

IV Nierówności Markowa i Czebyszewa

① Niech $X \in U([2,6])$. Oszacować metodą n. M & Cz.

$$P(\{\omega\in\Omega: X(\omega) > 4{,}5\})$$

② $X \in B(n,p)$.

Oszacować prawdop. zdarzenia, że # sukcesów = 50%

③ Oszacować prawdop. zdarzenia A,

$$A = \{\omega\in\Omega: |X(\omega) - EX| < 1\}$$

jeśli $Var(X) = 0{,}02$

④ Korzystając z n. Czebyszewa oblicz ile razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo spełnienia nierówności

$$\left|\frac{K_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01,$$

było niższe od 0,5, gdzie

K_n – liczba wyrzuconych „4" w n niezależnych rzutach kostką symetryczną.