Tematy i problemy obowiązujące na egzaminie podstawowym z RMPiSt na kierunku Informatyka 2, rok ak. 2020/2021
2021/2022

I. Podstawy - MPK

(1) Udowodnić, że dla $A, B \in \Sigma$

$A \cap B \in \Sigma$, $A \setminus B \in \Sigma$

(2) Uzasadnić, że nie istnieje σ-ciało Σ złożone tylko z trzech zdarzeń.

(3) Udowodnić, że $\forall A, B \in \Sigma$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(4) Stosując wynik z zad (3), wyprowadzić wzór na $P(A \cup B \cup C)$, $A, B, C \in \Sigma$

(5) Udowodnić, że z niezależności stochastycznej zdarzeń A, B wynika stochastyczna niezależność zdarzeń

(i) A^c, B

(ii) A^c, B^c

(6) W modelu produktowym

$$(\Omega, \Sigma, P) = (\Omega_1, \Sigma_1, P_1) \otimes (\Omega_1, \Sigma_2, P_2)$$

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) P_2(A_2).$$

Udowodnić, że zdarzenia

$$A = A_1 \times \Omega_2, \quad B = \Omega_1 \times A_2$$ są

stochastycznie niezależne w (Ω, Σ, P).

II. Rozkłady dyskretne i ich własności:

(1) $X \in B(n,p)$. Wyznaczyć rozkład $Y = \frac{X}{n}$

(2) X ma rozkład dyskretny. Metodą dystrybuanty obliczyć $P(A)$, gdzie

(i) $A = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\}$

(ii) $A = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\}$

(3) X ma rozkład

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1{,}5 \\ 0{,}25, & 1{,}5 < t \leq 3 \\ 0{,}75, & 3 < t \leq 5 \\ 1 & t > 5 \end{cases}$$

a) Obl. $P(\{\omega\in\Omega: 0{,}5 \le X(\omega) < 2{,}5\})$ stosując wykresy F i d.

b) Znaleźć rozkład $Y = -2X+1$

4. X ma rozkład

-2	-1	0	1	2
$1/3$	$1/6$	$2/9$	$1/6$	$1/9$

Obliczyć $E(Y^2)$, $Y = 2X+1$

5. $X \sim P(\lambda)$. Obliczyć $E(X^2)$

6. Udowodnić, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$ dla $p\in(0,1)$

7. Wiadomo, że $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ $(n \ge 2)$ gdzie:

(i) $d(X_1) = \dots = d(X_n)$: $\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array}$

(ii) są stoch. niezależne.

Obliczyć $P(\{\omega\in\Omega: X(\omega) = k\})$, $k\in\{0,1,2,\dots,n\}$.

III Rozkłady ciągłe i ich własności.

① X ma rozkład

$$F(t)=\begin{cases} 0, & t\le 0 \\ \frac{1}{2}t, & 0<t\le 2 \\ 1, & t>2 \end{cases}$$

Oblicz f, a następnie $P(\{\omega\in\Omega : 0{,}5 < X(\omega) < 1.5\})$

② Uzasadnić, że

$$X\in U([a,b]) \Rightarrow \frac{X-a}{b-a}\in U([0,1])$$

③ X ma f. gęstości $f(t)=\begin{cases} 2-2t & t\in[0,1] \\ 0, & t\notin[0,1] \end{cases}$

Stosując f i F oblicz

$$P(\{\omega\in\Omega : -1 < X(\omega) < 0{,}5\})$$

④ $X\in U([0,1])$. Znaleźć rozkład $Y=\frac{1}{X+1}$

⑤ X ma rozkład $F(t)=\begin{cases} 0, & t\le -1 \\ 1-t^2/2, & -1<t\le 0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$

Obl. $E(X^2)$

(6) $X \in N(m, \sigma^2)$, $m = -2{,}5$
$\sigma = 2$

Obl. $P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \leq 1{,}5\})$

(7) $X \in W(\lambda)$, $\lambda > 0$. Znaleźć rozkład
$Y = 1 - e^{-\lambda X}$

(8) Dla $X \in N(m, \sigma^2)$ wyznaczyć $E(X^2)$.

(IV) Nierówność Markowa-Czebyszewa.

(1) $X \in U([2,6])$. Oszacować metodą n. M i Cz.
$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > 4{,}5\})$

(2) $X \in B(n, 0{,}75)$. Jakie musi być n, aby z pr. co najmniej $0{,}95$ pr. empiryczne odbiegało od pr. teor. o mniej niż $0{,}001$?

(3) Korzystając z n. Cz. ocenić ile razy należy rzucić kostką, aby pr. spełnienia nierówności
$\left| \frac{k_n}{n} - \frac{1}{6} \right| < 0{,}01$

gdy k_n - l. występujących orłów w n rzutach, było większe od 0,5

(4) Oszacować prawd.

$\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - EX| < 1\}$, jeśli

$\mathrm{var}(X) = 0{,}02$

(V) C.T.G.

(1) $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$ - niez. zm. los. o rozkł. $J([1,2])$.

Metodą C.T.G. oszacować

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : 52 < \sum_{j=1}^{50} X_j < 98\right\}\right)$$

(2) $X_1, X_2, \ldots, X_{80} \in P(\lambda)$ i są niezależne $(\lambda = 3)$.

Oszacować

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \sum_{j=1}^{80} X_j(\omega) > 200\right\}\right)$$

③ Zastosować C.T.G. dla rozkładu dwumianowego.

④ Dla $n = 300$, $p = 0{,}25$ oszacować pr., że # sukcesów będzie mniejsza niż 250.

⑤ Metodą C.T.G. oszacować

$$P(\{\omega \in \Omega : X = k\}), \quad X \in B(n, p).$$

$$k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

(VI) Podstawy statystyki matem.

① Wiadomo, że $X \in N(m, \sigma^2)$, $\sigma = 2$.

Pobrano p.p. $(3{,}1;\ 3{,}5;\ 2{,}9;\ 2{,}7;\ 2{,}8)$

Na poziomie $\alpha = 0{,}15$ estymować m.

② $X \in N(m, \sigma^2)$, próba j.w.

Na poziomie $\alpha = 0{,}1$ estymować m

(3) $X \in N(m, \sigma^2)$, próba j.w.

Na poziomie $\alpha = 0{,}2$ estymować σ^2.

(4). Niech X jak w z.1.

Dla $\alpha = 0{,}15$ zweryfikuj

$H_0: m = 3$ $\quad H_1: m \neq 3$

(5) $X \in N(m, \sigma^2)$.

Pobrano p.p.

$-1{,}5$, 0, $0{,}51$, $0{,}48$, $0{,}62$, $0{,}33$, $-0{,}33$, $0{,}22$, $0{,}49$, $0{,}12$.

Dla $\alpha = 0{,}1$ zweryfikuj

$H_0: m = 0{,}35$, $\quad H_1: m \neq 0{,}35$

6) $X \in N(m, \sigma^2)$. Pobrano p.p.

$2{,}01$, $1{,}95$, $2{,}2$, $3{,}51$; $1{,}75$, $1{,}66$, $2{,}25$, $2{,}31$, $2{,}0$.

Dla $\alpha = 0{,}15$ zweryfikuj

$H_0: \sigma^2 = 0{,}2$, $\quad H_1: \sigma^2 > 0{,}2$.