SI ćwiczenia w trybie ONLINE

1.12.2020 część I

Przykładowe zadania

1) Podaj MPK dla ZL: rzut kostką, 2-monetami

2) Uzasadnij, że $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cap B \in \Sigma$, $A \setminus B \in \Sigma$

3) Uzasadnij, że $\forall A, B \in \Sigma$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) Powtórz 3) dla $A, B, C \in \Sigma$

5) $\forall A, B$, $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

6) Oszacuj pr., że rzucając 20 razy „6" pojawi się 10 razy.

7) Pokaż, że A, B sd. niezależne, to A^c, B i A^c, B^c również.

8) Uzasadnij, że $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$, gdy p_k są zdef. w $B(n,p)$

9) X ma rozkład dyskretny. Oblicz $(a<b)$

$$P(\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) < b\})$$

$$P(\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\})$$

10) X ma rozkład

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1{,}5 \\ 0{,}25, & 1{,}5 < t \leq 3 \\ 0{,}75, & 3 < t \leq 5 \\ 1, & t > 5 \end{cases}$$

a) Oblicz $P(\{\omega \in \Omega : 0{,}5 \leq X(\omega) < 2{,}75\})$ dowolną metodą

b) Znajdź rozkład $Y = -2X + 1$

11) X ma rozkład

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ kt^2, & 0 < t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

Znajdź rozkład $Y=-X+2$

12) X ma gęstość $f(t)=\begin{cases}2-2t, & t\in(0,1)\\ 0, & t\notin(0,1)\end{cases}$

Szkicuj f i F, obl. $P(\{\omega\in\Omega: -1<X(\omega)<0{,}5\})$

13) $X\in U([0,1])$. Znajdź rozkład $Y=\dfrac{1}{X+1}$

14) X ma rozkład

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\le -1\\ 1-t^2/2, & -1<t\le 0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

Oblicz EX^2

15) Uzasadnij, że $var(X)=E(X^2)-(EX)^2$

16) Oblicz $var\,X$ dla X z zad 14

17) X ma rozkład

-2	-1	0	1	2
$1/3$	$1/6$	$2/9$	$1/6$	$1/9$

Oblicz $E(Y^2)$, $Y=2X+1$

18) $X\in N(m,\sigma^2)$, $m=-2{,}5$, $\sigma=2$.

Obl. $P(\{\omega\in\Omega: |X(\omega)|\le 1{,}5\})$.

Rozwiązania

1) Rzut kostką

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\omega = k$, $k \in \Omega$

$\Sigma = P(\Omega)$,

$P(\{k\}) = p_k \in (0,1)$, $\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$.

Jeśli kostka symetryczna, to $p_k = 1/6$.

2 - monety

Etykietuję je: ①, ②.

Wtedy $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$

$(\Omega_1, \Sigma_1, P_1)$ - MPK dla ①

$(\Omega_2, \Sigma_2, P_2)$ - MPK dla ②

Zatem $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\Sigma = P(\Omega)$

$P(\{\omega\}) = P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = P_1(\{\omega_1\}) P_2(\{\omega_2\})$

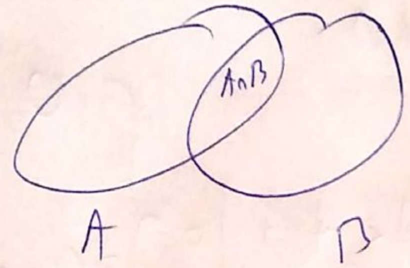
2) Niech $A, B \in \Sigma$. Wtedy $A^c, B^c \in \Sigma$.

Ale $A \cap B = (\underbrace{A^c \cup B^c}_{\in \Sigma})^c$, więc $A \cap B \in \Sigma$

$A \setminus B = A \cap B^c$ i z powyższego.

B) Niech będzie dany (Ω, Σ, P).

Weźmy $A, B \in \Sigma$. Możemy założyć, że $A \cap B \neq \emptyset$



(*) Wtedy $A \cup B = \underset{A \setminus (A \cap B)}{\underset{\parallel}{(A \setminus B)}} \,\dot\cup\, (A \cap B) \cup \underset{B \setminus (A \cap B)}{\underset{\parallel}{(B \setminus A)}}$

Udowodnijmy najpierw <u>zad 5</u>.

$E \subset F \Rightarrow P(F \setminus E) = P(F) - P(E)$

$F = E \,\dot\cup\, (F \setminus E) \Rightarrow$

$P(F) = P(E) + P(F \setminus E) \Leftrightarrow$

$P(F \setminus E) = P(F) - P(E)$.

Wracając do (*)

$$P(A \cup B) \overset{\text{z. pow.}}{=} P(A \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B) + P(B \setminus A \cap B) =$$

$$P(A) - \cancel{P(A \cap B)} + \cancel{P(A \cap B)} + P(B) - P(A \cap B)$$

5) Bierzmy $A, B, C \in \Sigma$.

$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ i powtarzamy wynik z zad. 3

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) + P((A \cup B) \cap C)$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cup C)$

i powtarzamy wynik z zad 3. ...

6) $(\Omega, \Sigma, P) = B(20, 1/6)$, bo założony, że kostka jest symetryczna.

Bierzmy zdarzenie $S_{10} = \{(\omega_1, \omega_2 \dots, \omega_{20}),$

$\#\{j : \omega_j = \text{„}6\text{"}\} = 20\}$.

Z MPK typu B wiadomo, że

$P(S_{10}) = \binom{20}{10} \left(1/6\right)^{10} \left(5/6\right)^{10} \longrightarrow$ uprościć!

7) Z założenia $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Bierzmy A^c, B. Ponieważ

$A^c \cap B = B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$, to

$P(A^c \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) \overset{\text{zad 3}}{=}$

$= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) =$

$= P(B)(1 - P(A))$ ...

8) Z zadania

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Skorzystajmy z dwumianu Newtona

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} \ \forall_{n \geq 1} \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dla $a = p$, $b = 1-p$ $(a+b = 1)$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = (a+b)^n = 1^n = 1$$

9). Niech X ma rozkład dyskretny.

~~Wtedy~~ Wtedy: $\forall \ a < b$

$$P(\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) < b\})$$

$$= P(\underbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) < b\}}_{A} \setminus \underbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\}}_{B})$$

$B \subset A$ bo $a < b$.

$$= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < b\}) - P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\})$$

$$= F_X(b) - F_X(a)$$

Dk

$$\{\omega\in\Omega:\ a < X(\omega) \le b\} =$$

$$= \Big(\overset{=A}{\{\omega\in\Omega:\ a \le X(\omega) < b\}} \setminus \overset{=B}{\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)=a\}}\Big) \cup$$

$$\overset{=C}{\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)=b\}}.$$

Stąd

$$P(\{\omega\in\Omega:\ a < X(\omega) \le b\}) =$$

$$P(\underbrace{A\setminus B}_{B\subset A}) + P(C) = P(A) - P(B) + P(C)$$

Z pomocą $P(A) = F_X(b) - F_X(a)$

$$P(B) = \lim_{t\to a^+} F_X - F_X(a)$$

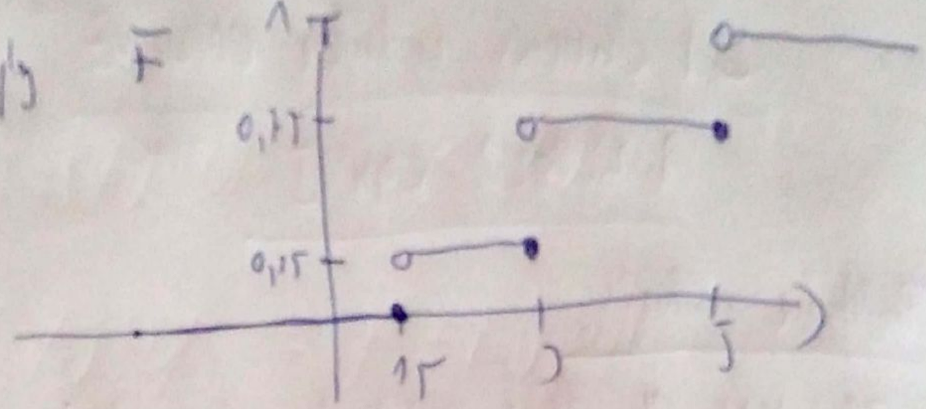
$$P(C) = \lim_{t\to b^+} F_X - F_X(b)$$

Stąd $P(\{\omega\in\Omega:\ a < X(\omega) \le b\}) =$

$$= \cancel{F_X(b)} - F_X(a) - \Big(\lim_{t\to a^+} F_X - F_X(a)\Big) + \lim_{t\to b^+} F_X - \cancel{F_X(b)}$$

$$= \lim_{t\to b^+} F_X(t) - \lim_{t\to a^+} F_X(t).$$

10) Narysuj F



Stąd

d_X

1,5	3	5
0,25	0,5	0,25

$A = \{\omega \in \Omega : 0,75 \leq X(\omega) < 2,75\} =$

$= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1,5\}$

Dlatego $P(A) = 0,25$ (na r. d_X)

$P(A) = F(2,75) - F(0,75) = 0,25 - 0 = 0,25$

Niech $Y = -2X + 1$. Wtedy

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1,5\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = -2\}$

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = -5\}$

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 5\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = -9\}$

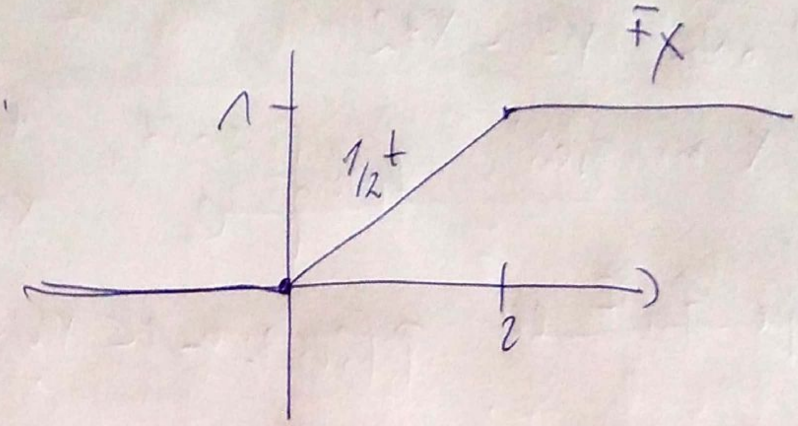
Dlatego

d_Y

−2	−5	−9
0,25	0,5	0,25

11) Przy.:

$X:$



Zatem $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \in [0,2] \\ 0, & t \notin [0,2]. \end{cases}$

Biorę $Y(\omega) = -X(\omega) + 2, \quad \omega \in \Omega$

$$F_Y(t) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) < t\}) = P(\{\omega \in \Omega : -X(\omega) + 2 < t\})$$

$$= P(\{\omega \in \Omega : -X(\omega) < t - 2\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > 2 - t\})$$

$$= 1 - P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 2 - t\}) =$$

$$= 1 - P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 2 - t\}).$$

Stąd $F_Y(t) = 1 - F_X(2-t), \quad t \in \mathbb{R}$, i dalej

$$f_Y(t) = (1 - F_X(2-t))' = -f_X(2-t) \cdot (-1)$$

$$= f_X(\underbrace{2-t}_{u}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \in [0,2] \\ 0, & t \notin [0,2], \end{cases}$$

$0 \leq u \leq 2$

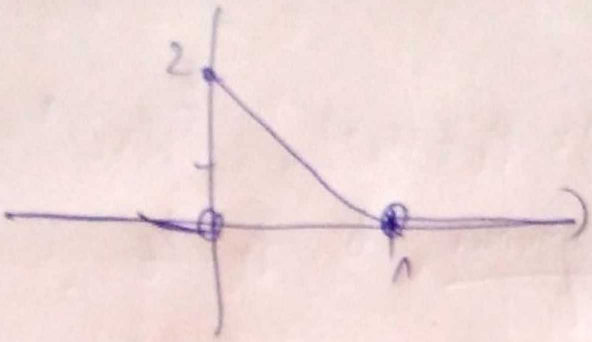
$0 \leq 2-t \leq 2$

$0 \leq t \leq 2$

a więc $\underline{f_Y = f_X}$.

12| Z zadania

$$X: \quad f(t) = \begin{cases} 2-2t, & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin [0,1] \end{cases}$$



Zadn $P(\{\omega \in \Omega : -1 < X(\omega) < 0{,}5\}) =$

$= P(\{\omega \in \Omega : -1 \le X(\omega) < 0{,}5\}) = \int_{-1}^{0{,}5} f(t)\,dt$

$= \int_{-1}^{0} 0 + \int_{0}^{0{,}5} (2-2t)\,dt = \; .....$

Znajdź $F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du$

$$= \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{t} (2-2u)\,du = \; .. & t \in (0,1) \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$ (dokończ!)

1) $X \in \mathcal{U}([0,1])$, $f_X(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin [0,1] \end{cases}$

$Y(\omega) = \dfrac{1}{X(\omega)+1}$, $\omega \in \Omega$

$F_Y(t) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) < t\}) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ (*)\; P(\{\omega \in \Omega : \frac{1}{X(\omega)+1} < t\}), & t > 0 \end{cases}$

$(*) = P(\{\omega \in \Omega : 1 < t(X(\omega)+1)\}) =$

$= P(\{\omega \in \Omega : \frac{1}{t} < X(\omega)+1\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > \frac{1}{t} - 1\})$

$= 1 - P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \frac{1}{t} - 1\}) = 1 - P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < \frac{1}{t} - 1\})$

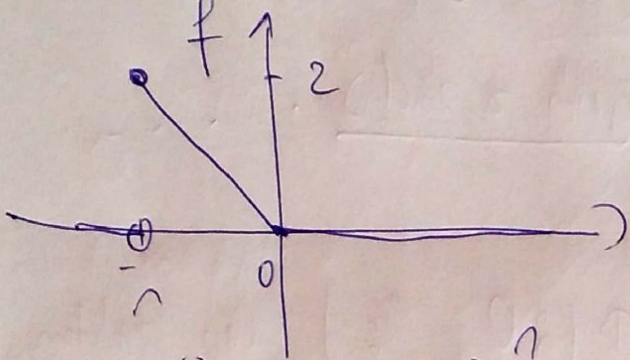
$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - F_X(\frac{1}{t} - 1), & t > 0 \end{cases}$

Stąd $f_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \left(1 - F_X(\frac{1}{t} - 1)\right)', & t > 0 \end{cases}$

Dokończyć!

14). Niech $F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1 \\ 1 - t^2/2, & -1 < t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

Wtedy $f(t) = F'(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1 \\ -2t, & -1 < t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$



$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} 0}_{=0} + \int_{-1}^{0} t^2(-2t)\,dt + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} 0}_{=0}$$

Dokończyć!

15) Z def. $Var(X) = E((X-EX)^2) = E(X^2 - 2X\,EX + (EX)^2)$

$= E(X^2) - 2(EX)^2 + (EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$

16) Wprost z def. $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ i skorzystać

z poprzedniego wyniku!

17) X :

-2	-1	0	1	2
$1/3$	$1/6$	$2/9$	$1/6$	$1/9$

$Y = 2X+1,$

$E(Y^2) = E\left((2X+1)^2\right) = E(4X^2+4X+1)$

$= 4E(X^2) + 4(EX) + 1$

DOKOŃCZYĆ!

18) $X \in N(-2{,}5,\ 2^2)$

$A = \{\omega \in \Omega: |X(\omega)| \leq 1{,}5\},\ P(A) = ?$

$$P(A) = P(\{\omega\in\Omega: -1{,}5 \leq X(\omega) \leq 1{,}5\}) \overset{\text{stand.}}{=}$$

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega: \frac{-1{,}5-(-2{,}5)}{2} \leq \frac{X(\omega)-m}{\sigma} \leq \frac{1{,}5-(-2{,}5)}{2}\right\}\right)$$

$$= P(\{\omega\in\Omega: 0{,}5 \leq N(\omega) \leq 2\})$$

$$N \in N(0,1).$$

Zatem

$$P(A) = P(\{\omega \in \Omega : -0{,}5 \leq N(\omega) < 2\})$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-0{,}5) =$$

$$\Phi(-0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5)$$

$$= \Phi(2) - (1 - \Phi(0{,}5)) =$$

$$= \underbrace{\Phi(2) + \Phi(0{,}5)}_{\text{TADELA!}} - 1$$