

SI c'hwirrenig w tnylwr ON-Lin

5.01.2020. cyr'i' I

Pwmlitwr zeddwon

1) Sprandni'ny $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ dda $\lambda > 0$

i p. gysleis' pward. Ifel' twn, b wyronni' dwsybwaly
bgo wrellhly.

2) X mra wrellhly $F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{2}t, & 0 < t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$

Znawu' wrellhly 2m. lony $Y = -X + 2$

3) X mra p. gysleis'

$$f(t) = \begin{cases} 2 - 2t, & t \in (0, 1) \\ 0, & t \notin (0, 1) \end{cases}$$

Obliti' dwsymu mchelan

$$P(\{u \in \mathbb{R} : -1 \leq X(u) \leq 0.5\}).$$

4) Dolwne' $a \in \mathbb{R}$, aly $f(t) = \begin{cases} a \sin t, & t \in [0, \pi] \\ 0, & t \notin [0, \pi] \end{cases}$

lylwr p. gysleis'. Wyrwne' dwsyd.

5) $X \in \mathcal{U}(L, R)$.

Zahlen' verteilt $Y = \ln(X+1)$

6) X m. verteilt z. rad. ① .

Zahlen' verteilt $Y = rX$, $r > 0$.

7) $X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Umgeschw. $\frac{X-m}{\sigma} \in \mathcal{N}(0, 1)$

8) X m. verteilt

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-t^2} & -1 < t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Obf. $\text{var}(X)$.

9) $X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Hyzennur' $E(X^2)$

10) $X \in \mathcal{B}(n, p)$. Zahlen' verteilt $Y = \frac{X}{n}$. Obf. EY , $\text{var}(Y)$.

11) Dla $n=300$, $p=0,25$ obliczyć p.w. i
liczbę rekordów większą 100.

12) $X_1, \dots, X_{50} \in \mathcal{U}(1,2)$ i są s.d. niezależne.

Oszacuj

$$P(\text{zad. 12: } 52 < \sum_{j=1}^{50} X_j < 98)$$

13) Niech X oznacza cechę P.G. Pokażemy P.P.
 $(-0,95, -0,35, 0, 0,20, 0,25)$

skrajności i najwyższą wartość empiryczną.

14) Cecha X P.G. ma rozkład $N(m, \sigma^2)$.

Pokazujemy przykłady: $(3,1, 3,5, 2,9, 2,7, 2,8)$.

Wiadomo, że $\sigma^2=4$, na poziomie istotności $\alpha=0,1$
skrajności przedział dla m .

15) Niech X jest w rozd. N . Dla $\alpha=0,1$
i P.P. f.v. zwrócić

$H_0: m=m_0$ przeciwko $H_1: m \neq m_0$, gdzie
 m_0 średnia przedziału z zad. 14.

Rozwiązanie zadania

① Należy $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ dla $\lambda > 0$.

Zgodnie z d. o funkcji gęstości R.P. należy sprawdzić, czy

a) $f(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Wobec a) spełniony jest drugi warunek. Ponieważ $f(t) = 0$ dla $t < 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Z drugiego całki nieobciążonej mamy:

$$\underline{I} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^T e^{-\lambda t} dt$$

Albo $\int e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}, \quad \text{mł}$

$$\underline{I} = \lambda \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^T = \lambda \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda T} + \frac{1}{\lambda} \right]$$

Albo $e^{-\lambda T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{bo } \lambda > 0$

Ostatke $\bar{I} = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1$.

Zaim f p' f. gikajin r. p.

Oznajm b, i $\exists (n, \bar{z}, p)$, ozn X, u

$$F_X(t) = P(\{u \in U: X(u) \leq t\}) = \int_{-\infty}^t f(u) du$$

Z wstawi f , $F_X(t) = 0, t \leq 0$. Nid $t > 0$.

Wkug i rachunek pomyz

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du = \int_{-\infty}^0 0 + \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} du$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \lambda e^{-\lambda u} \Big|_0^t = -\frac{1}{\lambda} \lambda e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \lambda = 1 - e^{-\lambda t}$$

Zaim

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

2) Naki $\bar{F}_X = \bar{F}$. Wtedy $f_X(t) = \begin{cases} 1/2, & t \in [0, 2] \\ 0, & t \notin [0, 2] \end{cases}$.

Znajdy f_Y .

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(\text{zwar: } Y(t) < t) = P(\text{zwar: } -X(t) + 2 < t) \\ &= P(\text{zwar: } X(t) > 2 - t) = 1 - P(\text{zwar: } X(t) \leq 2 - t) \\ &= 1 - P(\text{zwar: } X(t) < 2 - t), \text{ zgn} \end{aligned}$$

$$\bar{F}_Y(t) = 1 - \bar{F}_X(2 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ska $f_Y(t) = -f_X(2 - t) \cdot (-1) = f_X(2 - t)$.

Przy okazji!

3) Metoda 1. $P(-1 \leq X \leq 0,5) = \int_{-1}^{0,5} f(t) dt$

Przy okazji!

Metoda 2. $P(-1 \leq X \leq 0,5) = P(-1 \leq X < 0,5)$
 $= \bar{F}_X(0,5) - \bar{F}_X(-1)$

Próbujemy wyznaczyć F_X .

$$\text{Z założenia } F_X(t) = 0, \quad t \leq 0$$

$$F_X(t) = 1, \quad t > 1$$

Ndla $t \in (0, 1)$. Wtedy

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du = \int_{-\infty}^0 0 + \int_0^t (2-2u) du$$

Proszę dokończyć!

4) Szukaj $\alpha \in \mathbb{R}$, i α : a) $f(t) \geq 0$
b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

Ndla $[0, \pi]$, $\sin t \geq 0$. Dla $\alpha > 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 + \int_0^{\pi} \alpha \sin t dt + \int_{\pi}^{+\infty} 0 = \alpha \int_0^{\pi} \sin t dt$$

Proszę dokończyć!

5). Z rabin: $f_X(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \notin [0, 1] \end{cases}$

Znajdz f_Y .

$$F_Y(t) = P(\text{Zwyci}: Y(t) \leq t)$$

Ponieważ $\forall$ $X(t) \in [0, 1]$, $\ln(X(t+1)) > 0$.

Dlatego $F_Y(t) = 0$ dla $t \leq 0$. Mówi $t > 0$.

Wtedy $F_Y(t) = P(\text{Zwyci}: \ln(X(t+1)) \leq t)$

$$= P(\text{Zwyci}: X(t+1) \leq e^t) =$$

$$= P(\text{Zwyci}: X(t) \leq e^{t-1}) = F_X(e^{t-1})$$

Dlatego $f_Y(t) = F_Y'(t) = f_X(e^{t-1}) \cdot e^t$

$$0 \leq e^{t-1} \leq 1 \iff 1 \leq e^t \leq 2 \iff$$

$$t \in [0, \ln 2]$$

Dlatego $f_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0, \ln 2] \\ e^t, & t \in [0, \ln 2] \end{cases}$

6) Z rozkładu $d(X)$: $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$
 $(\lambda > 0)$.

Bierny $Y = rX$, $r > 0$. Zauw. $Y(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$
 czyli $\bar{F}_Y(t) = 0$, $t \leq 0$. Należy $t > 0$

$$\bar{F}_Y(t) = P(\exists u \in \mathbb{R}: Y(u) < t) =$$

$$= P(\exists u \in \mathbb{R}: rX(u) < t) = P(\exists u \in \mathbb{R}: X(u) < \frac{t}{r})$$

$$= \bar{F}_X\left(\frac{t}{r}\right). \text{ Skąd}$$

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ f_X\left(\frac{t}{r}\right) \cdot \frac{1}{r}, & t > 0. \end{cases}$$

Proszę dokonać!

7) Z gegeben

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nah $Y = \frac{X-m}{\sigma}$. Wähle

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(\text{Zurverf. } Y(t) < t) = P(\text{Zurverf. } \frac{X-m}{\sigma} < t) \\ &= P(\text{Zurverf. } X(t) < m+t\sigma) = F_X(m+t\sigma) \end{aligned}$$

Skal

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = f_X(m+t\sigma) \cdot \sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(m+t\sigma-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot \sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Zurück, in f_Y abh. von f_X durch $m=0, \sigma=1$.

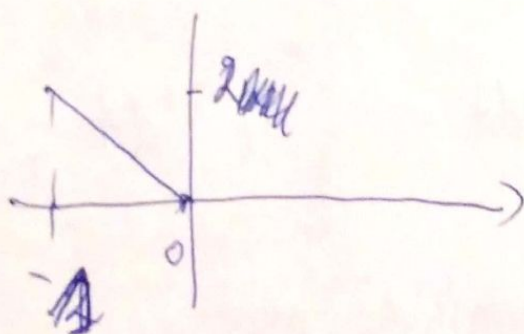
8) Wied., u' $\text{var}(X) = E(X^2) - (EX)^2$.

Pomocni' X ma rozklad ciagly, b

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt, \quad EX = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt.$$

Wyznac f_X :

$$f_X(t) = F'_X(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-1, 0] \\ -2t, & t \in [-1, 0] \end{cases}$$



Proszę dokonać rachunku!

9) Wied., u' $EX = m$, $\text{var}(X) = \sigma^2$.

Al' $\text{var}(X) = E(X^2) - (EX)^2$, czyli

$$\sigma^2 = E(X^2) - m^2 \Rightarrow E(X^2) = \underline{\underline{m^2 + \sigma^2}}$$

10) $X \in D(n, p)$ binomial, n

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\} \text{ sein}$$

$$P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

~~Nach~~ $Y(\Omega) = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$

sein

$$P(\{\omega \in \Omega: Y(\omega) = \frac{k}{n}\}) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = k\})$$

11) Z berechnen

$$X \in B(n, p), n = 300, p = 0,25.$$

Zusammenfassung C.T. 6.

Zusammenfassung.

$$P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = 200\}) =$$

$$P(\{\omega \in \Omega: 99,5 \leq X(\omega) < 100,5\})$$

$$\text{Als } X(v) = X_1(v) + \dots + X_{200}(v), \text{ gilt}$$

$$X_j \text{ nimmt den Wert } 0 \text{ mit Wahsch. } \frac{0}{1-p} \mid \frac{1}{p} = 0,15$$

Daher

$$= P\left(\{v \in V : \frac{99,5}{200} \leq \frac{X(v)}{200} < \frac{100,5}{200}\}\right)$$

$$= P\left(\{v \in V : \frac{99,5}{200} - 0,15 \leq \frac{X(v)}{200} - 0,15 < \frac{100,5}{200} - 0,15\}\right)$$

$$= P\left(\{v \in V : \frac{\frac{99,5}{200} - 0,15}{\frac{0,75 \cdot 0,15}{200}} \leq \frac{\frac{X(v)}{200} - 0,15}{\frac{0,75 \cdot 0,15}{200}} < \frac{\frac{100,5}{200} - 0,15}{\frac{0,75 \cdot 0,15}{200}}\right)$$

$$\cong \Phi(b) - \Phi(a)$$

Oblique to!

12) Ndh $X \in \mathcal{U}(2, 2]$. Why

$$EX = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

Ndh $Y = \sum_{j=1}^{50} X_j$, X_j - merakam.

Why: $EX = 50EX = 75$

$$\text{Var}(Y) = 50 \text{Var}(X) = \frac{50}{12}$$

Skrujij C. T. 6.

$$P(52 < Y(1) < 98) =$$

$$= P\left(\frac{52}{50} \leq \frac{Y(1)}{50} < \frac{98}{50}\right) =$$

$$= P\left(\frac{52}{50} - \frac{3}{2} \leq \frac{Y(1)}{50} - \frac{3}{2} < \frac{98}{50} - \frac{3}{2}\right)$$

$$= P\left(\frac{\frac{52}{50} - \frac{3}{2}}{\sqrt{\text{Var}\left(\frac{Y}{50}\right)}} \leq \frac{\frac{Y(1)}{50} - \frac{3}{2}}{\sqrt{\text{Var}\left(\frac{Y}{50}\right)}} < \frac{\frac{98}{50} - \frac{3}{2}}{\sqrt{\text{Var}\left(\frac{Y}{50}\right)}}\right)$$

Prosy dokumen!

13) Z tablicy

$$(-0,95, -0,75, 0, 0,20, 0,15) =$$

$$= (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) | (u_0),$$

gdzi $d(X_j) = d(X)$ i sd. mierzal.

Bierny proby

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow F_5(t, u_0) = \begin{cases} 0 & t \leq -0,95 \\ 1/5 & -0,95 < t \leq -0,75 \\ 2/5 & -0,75 < t \leq 0 \\ 3/5 & 0 < t \leq 0,20 \\ 4/5 & 0,20 < t \leq 0,15 \\ 1 & t > 0,15 \end{cases}$$

$$\frac{1}{5} \# \{i: X_i \leq t\}$$

Proby wylosow!

14) Niech $X \in N(m, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 4$ i ozn

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) | (u_0) = (2,1, 2,5, 2,9, 2,7, 2,8)$$

$$(n=5).$$

Skonstruuj Z_1, Z_2 tak, q

$$P(\text{kein } Z_1(u) < m < Z_2(u)) = 1 - \alpha,$$

gilt $\alpha = 0,1$.

Benutz: $Z_1(u) = \bar{X}_5(u) - n_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\boxed{n=5, \sigma=2}$

$$Z_2(u) = \bar{X}_5(u) + n_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

oder: $\Phi(n_\alpha) = 1 - \alpha/2$, gilt

$$\Phi(n_\alpha) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = \underline{0,95}.$$

Z-funktion $N(0,1)$ mag: $n_\alpha = \underline{1,65}$

Zahlen $Z_1(u_0) = \bar{X}_5(u_0) - 1,65 \frac{2}{\sqrt{5}} = \dots$

$$Z_2(u_0) = \bar{X}_5(u_0) + 1,65 \frac{2}{\sqrt{5}} = \dots$$

Prüfung ableiten:

oder mit $(Z_1(u_0), Z_2(u_0)) \geq \underline{\underline{\text{pr. } 0,9}}$.

15) Wskendm :

1) Zngken' $z_1(u_0)$ i' $z_2(u_0)$ z 7nd. 14

2.) skeln $m_0 = \frac{1}{2} (z_1(u_0) + z_2(u_0))$

3) Wzmmi' oben kngly $\mathbb{Q}$

4) Skonsken' of. zm. forwg z

i' spmrdi' , en $z(u_0) \in \mathbb{Q}$

5) uchieti' of.