

SI - dzieremia w tydzień on-line

20.10.2020, 13.30 - 15.00, 15.15-16.45

Temat . Wstęp do teorii prawdopodobieństwa:
zjawisko losowego i jego model probabilist.

Badaniem kontyngencji wzajemnie zależnych
na poprzednim wykładzie. Zajmujemy się
ZJAWISKIEM LOSOWYM (ZL).

Na poprzednim wykładzie pojedynczego rzutu monetą
ustaliliśmy, że opis takiego ZL może
wyglądać następująco:

(W, S, m) , gdzie:

$W = \{\emptyset, R\}$ - zbiór wszystkich wyników
obserwacji

$S = \{W, \emptyset, \{R\}, \{R\}^c\}$ - zbiór (wzajemnie)

Wzrostlich stanów związków z doświadczeń Z_L ,
 m - miara, czyli

$$S \ni s \longrightarrow m(s) \in [a, b],$$

którego zadaniem jest pomiar iluściowy każdego
 stanu, gdzie określenie m i m ma
 co najmniej następujące własności:

$$1) \quad \forall_{s_1, s_2 \in S} \quad s_1 \subseteq s_2 \Rightarrow m(s_1) \leq m(s_2)$$

(monotoniczność)

$$2) \quad \forall_{s_1, s_2 \in S} \quad s_1 \cap s_2 = \emptyset \Rightarrow$$

$$m(s_1 \cup s_2) = m(s_1) + m(s_2)$$

(addytywność)

Polecałoby, że wtedy $a = 0 (= m(\emptyset))$
 a więc $b = m(W)$

Aby to zrobić, zaciągamy obserwacje stem W
wielokrotne nuczając tę monetę:

$$(*) (O_1, O_2, O_3, \dots, O_n)$$

O_j - j -ta obserwacja

$n \geq 2$ - ilość powtórzeń

Obserwacja powstanie w stem W oznacz, 1
albo on pojawił się, albo nie.

Zatem O_j przyjmuje wartości: W albo $\emptyset$.

Albo $m(\emptyset) = 0$, zatem jeśli tak jest
możemy powtórzyć tę obserwację.

Oznacza to, że z punktu widzenia serii $(*)$
będą mieć

$$(**) (W_1, W_2, W_2, \dots, W_m)$$

~~Obt~~ Mianem serii $(*)$ przebiegu p_m ,

$$czyli \quad f_m = \frac{\# \text{zauważonego zjawiska}}{\# \text{partycji} = m}$$

$\Sigma (x_i)$ wynika, że $f_n = \frac{n}{n} = 1$,

i dlatego $b = m(W) = 1$.

Konkretnie opis tego ΣL mamy:

$m(\{0\}) = p$, $m(\{1\}) = q$, gdzie

$p+q=1$, $p, q \in (0, 1)$.

W szczególności, gdy $p=q=1/2$,
 będą mieli, że ΣL symetryczne
 (jednowalne).

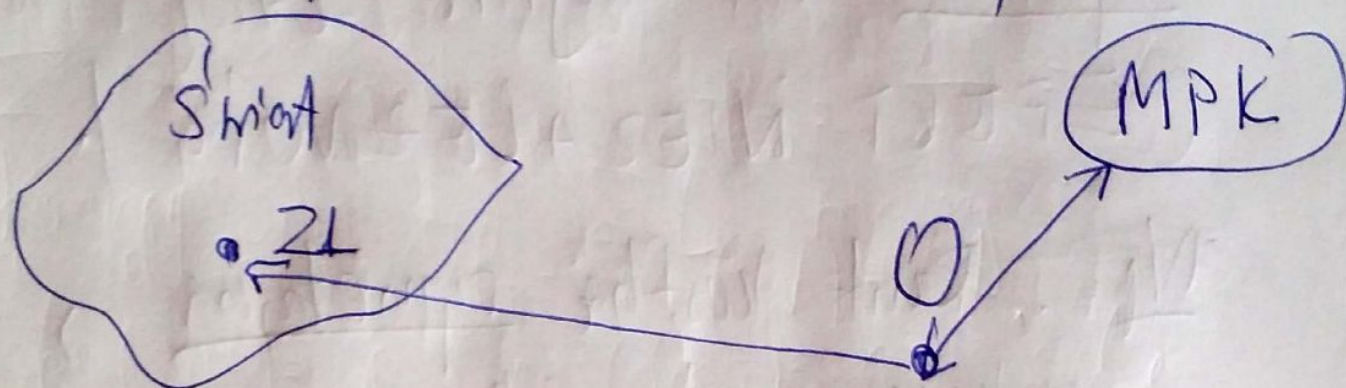
ZADANIA

1) Podaj opis dla modelu kostki

2) Podaj opis dla modelu 2-monetarnym

Uogólnienie

Pomysł, że mamy ZL i wyobrażamy
w nim jego obserwatora (mp.1).



Wtedy wynikiem jego obserwacji jest tz .

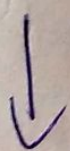
MODEL PROBABILISTYCZNY KOŁMOGOROWA (MPK)*, na który składają się:

(i) zbiór Ω (odpowiednik N), gdzie
każdy element $\omega \in \Omega$ jest wynikiem
obserwacji (z ang. SAMPLE POINT)

* jego nieformalna postać przedstawimy wyżej jako
-5- (N, S, m)

(i') rodzin Σ złożona z pewnych podzbiórów Ω , gdzie

$$A \in \Sigma \implies A \subset \Omega$$



na mocy ZDARZENIEM (wewnętrzny STANEM),

gdzie Σ ma następujące własności:

(i) $\emptyset \in \Sigma$

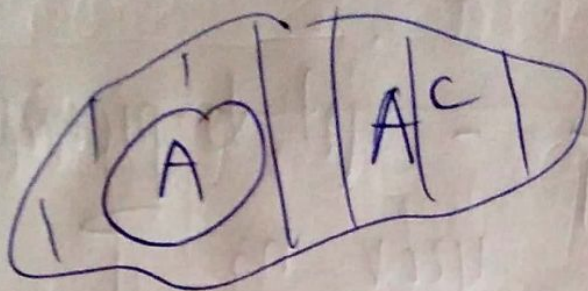
(ii) $A \in \Sigma \implies A^c \in \Sigma$

(iii) $\{A_1, A_2, A_3, \dots\} \subset \Sigma$, to

$$\bigcup_{j \geq 1} A_j \in \Sigma$$

Komentarz: ad (i) jasne

ad (ii) mamy symetrię: jeśli „coś” jest zdarzeniem, to reszta też (rys. 2.1)



my. 2

ad(III) W praktyce oznacza to, że
jeśli $A, B \in \Sigma$, to $A \cup B$ zdarzenie.

ZADANIA

1) Uzasadnij, że

$$A, B \in \Sigma, \text{ to } A \cap B \in \Sigma$$

$$A \cup B \in \Sigma$$

(iii) funkcja P (danej miary m)

$$\Sigma \ni A \longrightarrow P(A) \in [0, 1]$$

Zwana FUNKCJĄ PRAWDOPODOBIEŃSTWA,
której zadaniem jest poznaję zdarzenia.

W skali $[0,1]$. Wtedy linij

$P(A) \in [0,1]$ nazywamy

PRAWDOPODOBIEŃSTWEM ZDARZENIA A ,
gdzie P ma własności:

$$(0) \quad P(\emptyset) = 0$$

$$(0') \quad \forall_{A \in \Sigma} \quad P(A^c) = 1 - P(A)$$

(0'') dla zdarzeń $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$,
takich, że $A_i \cap A_j = \emptyset$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

Komentarz

ad 1 w praktyce:

$A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \emptyset$, to

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, czyli

Znane zasady addytywności.

ZADANIE

1) Nch $A, B \in \Sigma$. Uzasadnij, że

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2) Przeprowadzić procedurę dla 3 zdarzeń
 A, B, C .

3) Uzasadnij, że $A, B \in \Sigma$

$$A \subset B, \text{ to } P(B|A) = P(B) - P(A)$$

ZADANIE

Rozchwał 1 i 3 Zleżom zdarzeń

Rozchwał 1 i 2 Podchizmiła

Przegląd wybranych MPIC

Dalej potrzebujemy kilku ważnych przykładów MPIC.

(A) Model DYSKRETNY (Ω, Σ, P) .

Wtedy: (i) $|\Omega| = m$, czyli

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$$

(i') $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ - czyli wszystkie podzbiory $\Omega \equiv$ każdy $A \subset \Omega$ jest zdarzeniem

(i'') P zdechimeram p' następująco

$$P(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \sum_{j \in I_A} p_j, & p_j = P(\omega_j) \\ & \bigcup_{j \in I_A} \omega_j = A \end{cases}$$

Komentarz do def. $P(A)$.

Wzrost $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, gdzie

$$p_1 = P(\{\omega_1\}), p_2 = P(\{\omega_2\}), p_3 = P(\{\omega_3\})$$

Yh' np. $A = \{\omega_1, \omega_3\}$, to

$A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_3\}$, wg 2 zasady
addytywności

$$P(A) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_3\}) = p_1 + p_3$$

W szczególności, gdy mamy symetryczny cykl

$$p_1 = p_2 = \dots = p_m = p, \quad a \quad n \in$$

$$mp = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{m}$$

to wtedy

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} - \text{ist to pierwszy} \\ \text{człowiek na } P$$

skorowcy przez PASCALA, FERMAI'A
i innych.

~~ZAD~~

Komentarz

Rent miesięczny, koszty, losowe z ujemny
opisane w modelu dyskretnym

Nazwy przybliżony model dyskretny

1) $B(n, p)$ - model BERNOUILLIEGO

gdzie $n \geq 1$, $p \in (0, 1)$ dane

(np. $B(100; 0,75)$)

Wtedy

$$\Omega \ni \omega = (\underbrace{b_1, b_2, \dots, b_n}_n)$$

$b_j \in \{0, 1\}$, cyfr ω - ciąg BINARNY
długości n

$$P(\omega) = p^k q^{n-k}, \text{ gdzie}$$

$q = 1 - p$, k - liczba jedynek w ω .

Jeli puz S_k (" S to „sukces”)

oznacy wzrothu $\omega \in \Omega$, ze liczba
jedynek wynosi k ($= 0, 1, 2, \dots, n$),

$$\text{to } P(S_k) = \binom{n}{k} p^k \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{q^{n-k}}$$

ZASTOSOWANIE

Wielokrotne powtarzanie danych eksperymentalnych, ale k-ta obserwacja nie
wpływa na wynik $k+1$

(EFEKT NIEZALEŻNOŚCI)

Np. Rzut kostką symetryczną,
sukcesem $p = 1/6$.

Czyli jeśli wypadnie < 6 , to 0.

ZAD Określić prawdop. że mając
20 razy $1/6$ przejdzie do 10 razy.

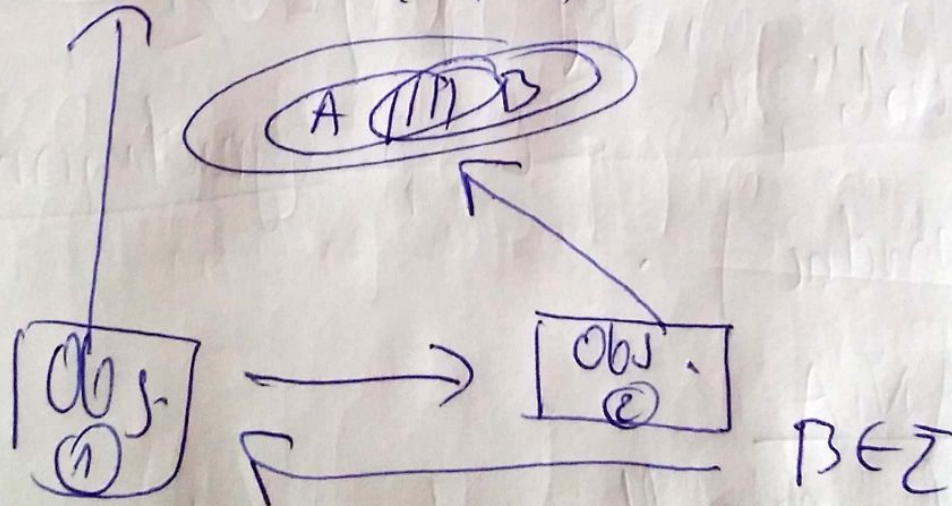
(D) Model WARUNKOWY

Konstanty:

Dane $p \in ZL$ i jej opis (Ω, Σ, P) .

Otrzymujemy dwudziestą indukcyjną, że
mystyczny obserwator ZL poprzez relaty-
wną tę obserwacji do pewnego zdarzenia
 $B \in \Sigma$, gdzie $P(B) > 0(m)$

ZL. (Ω, Σ, P)



Wtedy mamy nowy model $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{P})$,
gdzie:

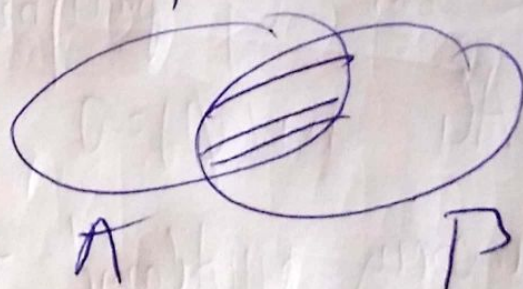
$$\tilde{\Omega} = B$$

$$\tilde{A} \in \tilde{\Sigma} \equiv \exists_{A \in \Sigma} \tilde{A} = A \cap B \quad (\text{patrz mys.})$$

$$\tilde{\Sigma} + \tilde{A} \longrightarrow \tilde{P}(\tilde{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Komentarz

1) $\tilde{A}$ nazywamy też "SLADEM"
 A na B



2) $\tilde{P}$ nazywamy prawdopodobieństwa
 WARUNKOWYM

3) WARUNKEM p i zdarzeniem B

4) $\tilde{P}(\tilde{A})$ zapisujemy też $P(A/B)$

czytamy

"prawdop. warunkowe zdarzenia A
pod warunkiem zajścia B"

Problem. Kiedy $P(A) = \tilde{P}(\tilde{A})$, (*)
czyli warunek nie zachodzi

Zdefiniujmy $\tilde{P}(\tilde{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$,

a m. (*) oznacza, że

$$P(A \cap B) = P(A|P(B))$$

Jeśli tak jest, to mówimy, że
zdarzenia A i B są stochastycznie
niezależne — a7

ZADANIA

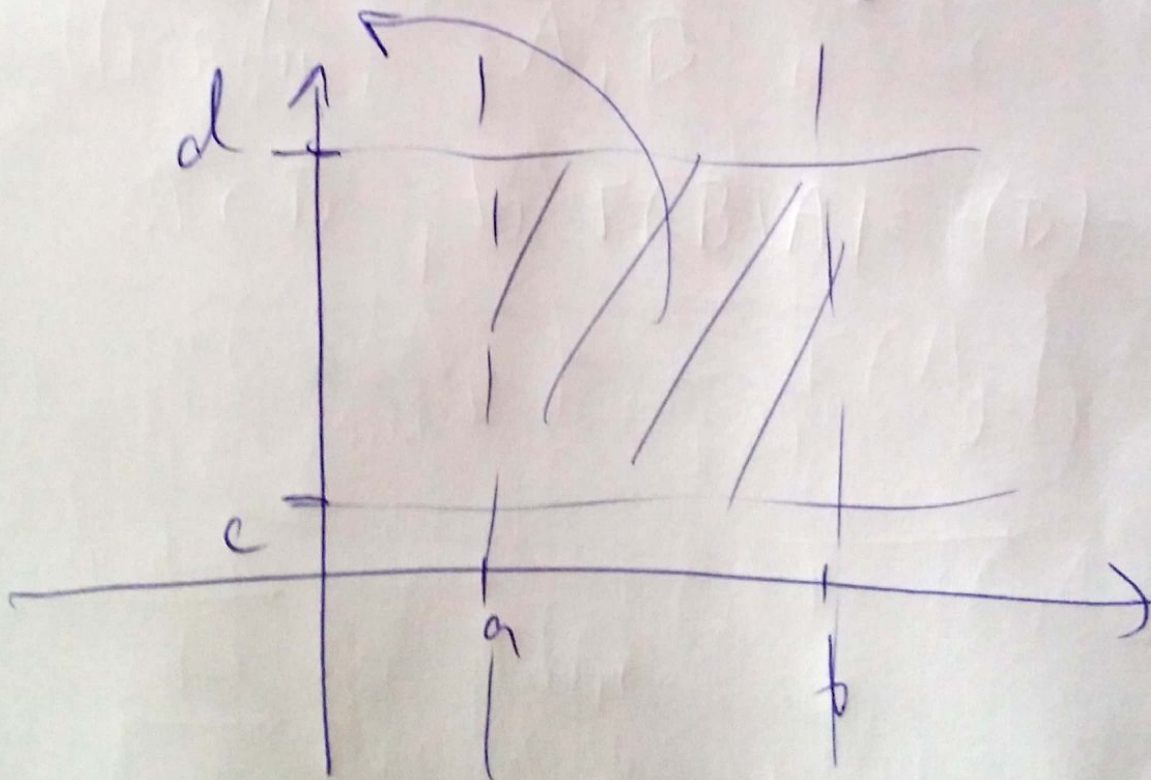
Zbier str. 22 - 23

Pochybnik str. 23 - 28

(C) MODEL GEOMETRYCZNY ($d=2$)

Oznana Ω, η ($\eta, \bar{z}, p$) myglada
następująco:

$$\Omega = [a, b] \times [c, d]$$



Typowe zadanie na pastki

$$A = \{ (x, y) : x \in [a, b], d(x) \leq y \leq g(x) \},$$

gdzie $d, g : [a, b] \rightarrow [c, d]$

funkcje ciągłe



Why A naprawdę też „prostokątem
Kryształowym”. Prościej, oblicz p' nasobmyj

$$\mu(A) = \frac{\int_a^b (g(x) - d(x)) dx}{(b-a) \times (d-c)}$$

ZAD. 1) Prizpomeni' sobore
podstany vachnolen (9+10)

2) Zvidi radan' sl. 27

* Podnuly sh. 30-31.