SI wykład on-line

26. 11. 2020 cz. 1.

Temat. Przypadki rozkładu ciągłego. Parametry rozkładu.

Problem 1°. Czy każdy rozkład musi być dyskretny?

2°. Jeśli nie, to jak zdefiniować rozkład, który nie jest dyskretny?

ad 1. Wcześniej podaliśmy przykład tzw. ciągłego M.P.K., co należy rozumieć, że odp. na kwestię 1 brzmi NIE.
Istnieją zatem rozkłady, które nie są dyskretne.
Z powodów „technicznych" zajmiemy się tylko takimi, które są całkowicie niedyskretne. Dalej będziemy je nazywali rozkładami ciągłymi.
W kwestii problemu #2: do def. użyjemy pojęcia dystrybuanty.
Przypomnijmy, że definiując rozkład dyskretny wykorzystaliśmy pojęcie ogólne dystrybuanty F, gdzie

$$F: \mathbb{R} \to [0,1]$$

(i) $\lim_{t \to -\infty} F = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F = 1$

(ii) F niemalejąca

(iii) F co najmniej lewo-stronnie ciągła.

Jeśli dodatkowo F jest różniczkowalna (być może poza skończonym zbiorem), to powiemy że mamy rozkład ciągły.

Tw. 1 (o rozkładzie ciągłym)

Jeśli mamy rozkład ciągły F, to:

1°. istnieje zjawisko losowe i jego M.P.K. (Ω, Σ, P)

2°. istnieje zmienna losowa (nazywana ciągłą) X, a więc

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} \ \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\} \in \Sigma$$

3°. funkcja F_X zdef. jak niżej

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\})$$

jest identyczna z F, czyli

$$\forall_t \ F(t) = F_X(t)$$

4°. Pochodną F_X' oznaczamy przez f_X i nazywamy funkcją gęstości rozkładu (lub zm. losowej X)

Wtedy

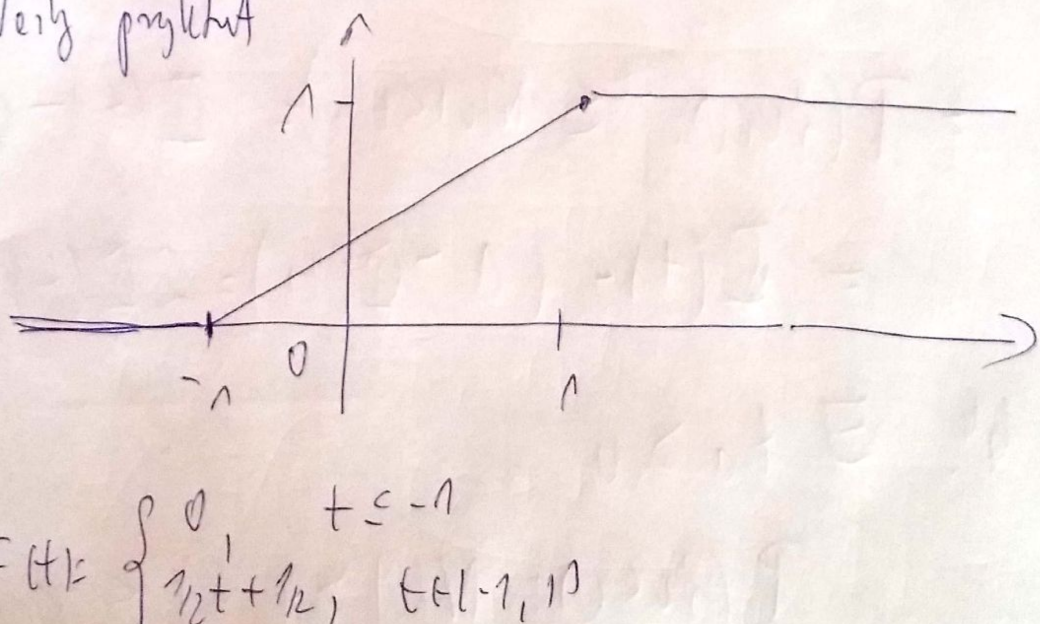
$$F_X(t) = P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)<t\}) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du$$

5°. $\forall_{x_0\in\mathbb{R}}\ P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)=x_0\})=0$

6°. $f_X \geq 0$ oraz $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du = 1$.

Uwagi i komentarze do Tw. 1

1°. Ważny przykład



$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1 \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, & t\in(-1,1) \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

Zauw., że F jest rozkładem ciągłym (tylko w $-1, 1$ nie jest różniczkowalna!).

Z tw. wykładu, że $\exists\ (\Omega, \Sigma, P)$ – jako opis ZL

oraz zm. losowa $X: \Omega \to \mathbb{R}$, że

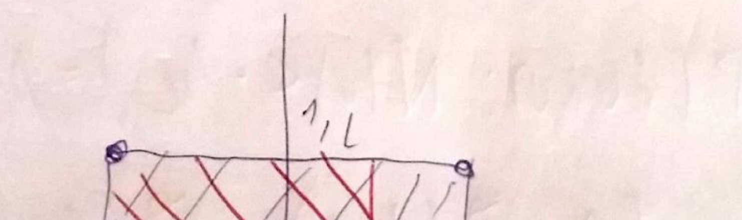
$$\forall_{t \in \mathbb{R}}\ P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}) = F(t) = F_X(t)$$

Zatem zdarzenie $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < 0{,}5\}$ można

zmierzyć za pomocą F : $F(0{,}5) = P(A)$

Po zróżniczkowaniu

$$f_X(t) = F_X'(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-1,1] \\ 1/2, & t \in [-1,1] \end{cases}$$

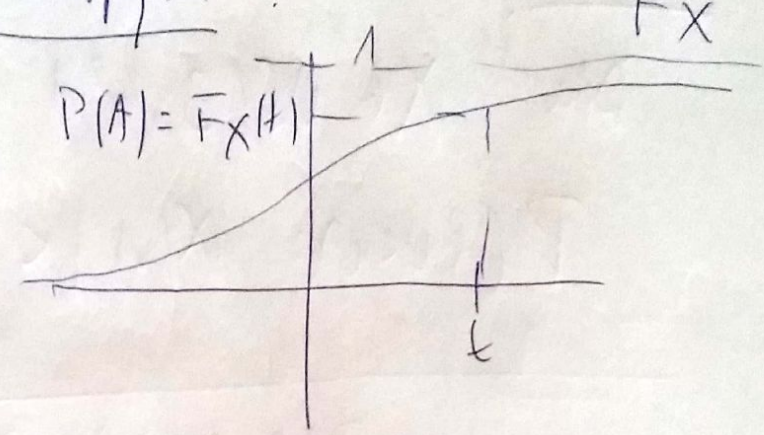


Oczywiście $f_X \geq 0$ i pole figury $= 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du$

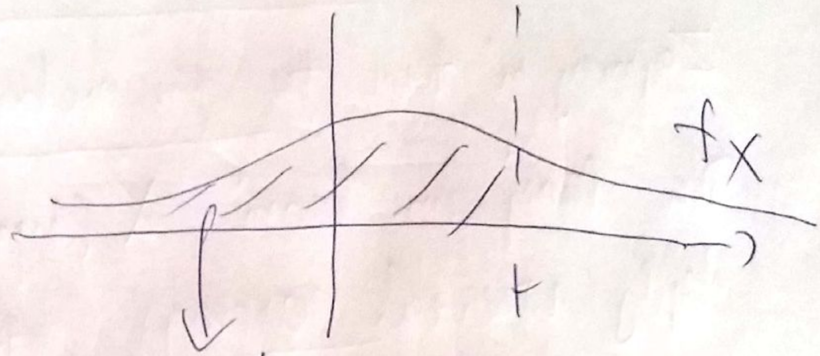
Więc $P(A) =$ pole fig. zakresk. na czerwono $=$

$$= \int_{-\infty}^{0{,}5} f_X(u)\,du .$$

Ogólnie sytuacja jest następująca :



$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}$



$$P(A) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du$$

2°. Porównanie z rozkł. dyskretnym

typ rozkł. X	Fx	rozkład
dyskretny	schodkowa	dx - tabelka
ciągły	gładka	f. gęstości.

3°. Uzasadnić 5° pokazuje, że dla rozkładów ciągłych nie posługujemy się zdarzeniami $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = t_0\}$

W zamian bierzemy albo:

$A = \{\omega \in \Omega : \quad X(\omega) < t_0\}$ albo

$B = \{\omega \in \Omega : \quad t_0 - \varepsilon \leq X(\omega) < t_0\}$ dla

p. $\varepsilon > 0$.

Wtedy $P(A) = F_X(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f_X(u)\,du$

$$P(B) = F_X(t_0) - F_X(t_0 - \varepsilon) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} f_X(u)\,du.$$

<u>Tw. 2</u>.

Na odwrót, mając $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, która ma całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ równą 1 istnieje

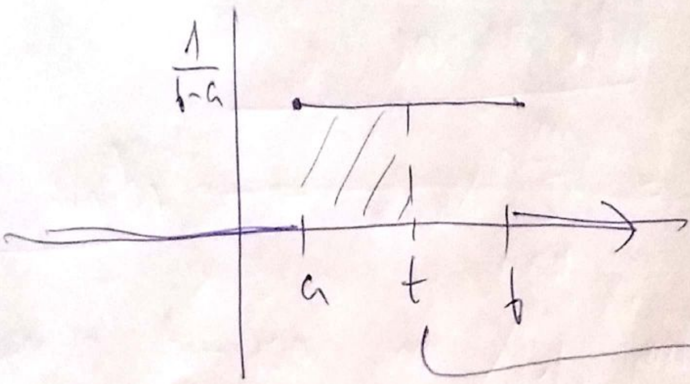
ZL, jego opis (Ω, Σ, P) oraz zm. losowa X, że $F_X' = f$.

Dwa przykłady r. ciągłych.

1°. $X \in U([a,b])$ - rozkład jednostajny na $[a,b]$

oznacza, że f. gęstości ma postać

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a,b] \\ 0, & t \notin [a,b] \end{cases}$$

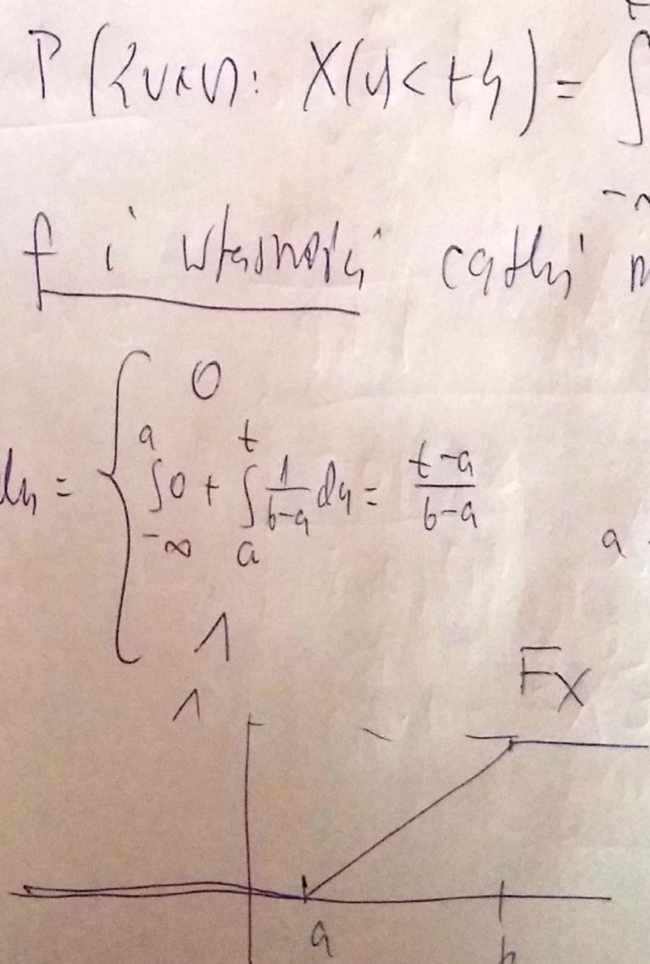


Znajdź F_X. Z tw. 2 $\exists\,(\Omega,\Sigma,P)$, X, że

$$F_X(t) = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)<t\}) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du$$

Z postaci f i własności całki mamy:

$$\int_{-\infty}^{t} f(u)\,du = \begin{cases} 0 & t \le a \\ \int_{-\infty}^{a} 0 + \int_{a}^{t} \frac{1}{b-a}\,du = \frac{t-a}{b-a} & a < t \le b \\ 1 & t \geq b \end{cases}$$



Zad. 1.

Niech $X \in U([a,b])$. Pokazać, że

$Y = \frac{X-a}{b-a} \in U([0,1])$ i na odwrót,

gdy $Y \in U([0,1])$, to $a + (b-a)Y \in U([a,b])$.

Jest to tzw. „zasada skalowania" dla r. jednost.

2°. Rozkład NORMALNY zwany tż r. GAUSSA

$X \in N(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ oznacza, że

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Dla $m=0$, $\sigma = 1$ mamy $N(0,1)$ — standardowy rozkład normalny.

Wtedy F_X oznaczamy Φ.

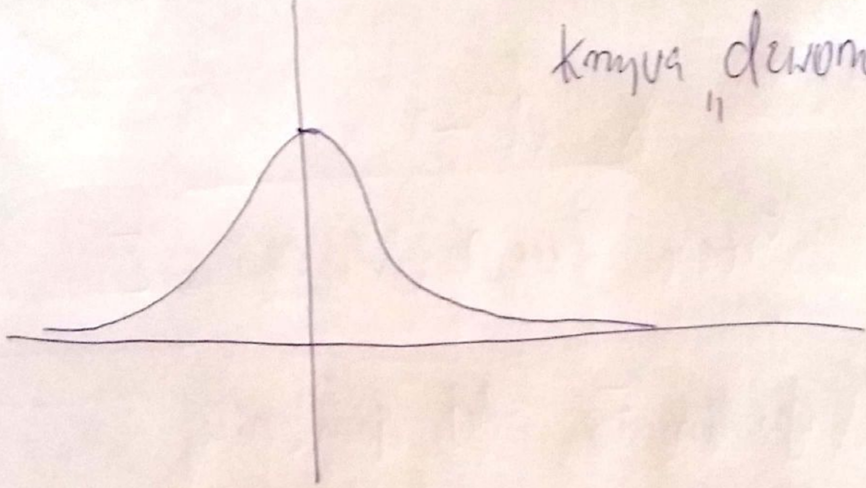
Twierdz. (o rozkładzie N)

Niech $X \in N(m, \sigma^2)$. Wtedy:

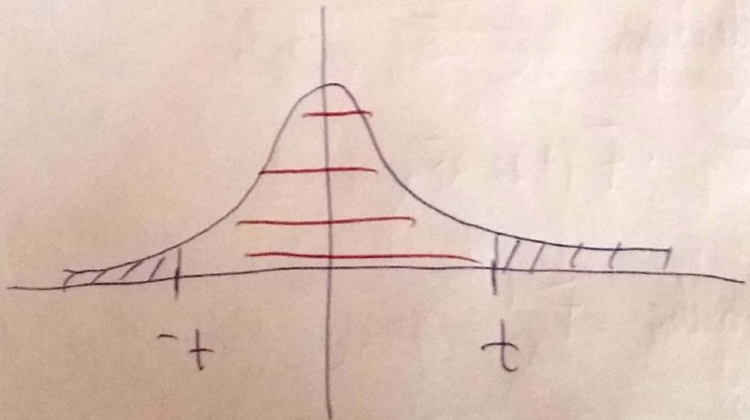
1°. $N = \frac{X-m}{\sigma} \in N(0,1)$ (zasada standaryzacji)

oraz $$f_N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

krzywa „dzwonowa"



2°. Niech $t > 0$



z symetrii, obszary zakreskowane mają jednakowe pola, zatem

$$P(\{\omega \in \Omega : N(\omega) < -t\}) = 1 - P(\{\omega \in \Omega : N(\omega) < t\})$$

Oznacza to, że

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$$

Ponadto $\Phi(0) = 1/2$ (dlaczego?)

3°.

$$P(\{\omega\in\Omega : |N(\omega)| < t\}) = P(\{\omega\in\Omega : -t < N(\omega) < t\})$$

obraz zakresu na czerwono

$$= P(\{\omega\in\Omega : -t \leq N(\omega) < t\}) = \Phi(t) - \Phi(-t)$$

$$= \Phi(t) - (1 - \Phi(t)) = 2\Phi(t) - 1$$

4°. $\exists\, t_0 > 0$

$$P(\{\omega\in\Omega : N(\omega) \geq t_0\}) \leq 0{,}01,$$

wystarczy wziąć $\underline{\underline{t_0 = 3}}$.

<u>WNIOSEK</u>. Cała informacja o $N(\Phi)$ zawarta jest na p. $[0, 3]$. Φ jest <u>stablicowany</u>!

Przykład.

Wiadomo, że $X \in N(-2, 2^2)$.

Oblicz $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > -3\})$.

Wykorzystując zasadę standaryzacji: $m=-2$, $\sigma=2$

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > -3\}) =$$

$$= P\left(\left\{\omega \in \Omega : \frac{X(\omega)-m}{\sigma} > \frac{-3+2}{2}\right\}\right) =$$

$$= P(\{\omega \in \Omega : N(\omega) > -1/2\}) =$$

$$= 1 - P(\{\omega \in \Omega : N(\omega) \leq -1/2\}) =$$

$$= 1 - P(\{\omega \in \Omega : N(\omega) < -1/2) = 1 - \Phi(-1/2)$$

$$= 1 - (1 - \Phi(1/2)) = \Phi(1/2).$$

Z tablic $\Phi(1/2) \cong 0{,}69146$.

Zad 2.

Dla $X \in N(3, 4^2)$ oblicz

$$P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| < 2,25\})$$

PARAMETRY ROZKŁADU

Zajmiemy się teraz tzw. parametrami rozkładu.

Dla danej zm. losowej X (typu dyskretnego lub ciągłego) będziemy rozważali operację, która będzie zapisywana

$$X \longrightarrow EX \in \mathbb{R}$$

Uwaga. Nie dla k. X da się ją przeprowadzić.

Wtedy liczbę EX nazwiemy wartością oczekiwaną zm. losowej (albo jej rozkładu).

Będziemy też mówili: średnia (m) lub pierwszy moment, czyli

$$m = m_1 = EX$$

Tw. 1 (liniowość operacji E)

Niech X, Y zm. losowe, dla których EX, EY istnieją.

Wtedy dla $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + bY$ ma w. oczek. oraz

$$E(aX+bY) = a(EX) + b(EY).$$

Ponadto $Ec = c$ (c - zm. stała)

Problem. Jak obliczyć EX?

I. Przypadek dyskretny.

Założenie: $X(\Omega) = \{x_n, n \in N_0 \subset \mathbb{N}\}$

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_n\}) = p_n$$

Wtedy EX istnieje, gdy szereg $\sum_{n \in N_0} x_n p_n$ jest zbieżny oraz

$$EX = \sum_{n \in N_0} x_n p_n$$

Uwagi.

Gdy X m. skończony rozkł. dyskr., czyli

$$d_X: \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & & p_n \end{array},$$

to EX istnieje zawsze i

$$EX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \text{ — średnia ważona}$$

W szczególności, gdy X ma rozkład symetryczny, czyli $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$, to

$$EX = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ — średnia arytmetyczna.}$$

Przykłady.

1°. $X \quad \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array} \qquad EX = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

2°. $X \quad \begin{array}{c|c|c} -1 & 0{,}5 & 2 \\ \hline 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{array}$

$$EX = -1 \cdot 0{,}3 + 0{,}5^2 + 2 \cdot 0{,}2$$