

SI nylecht on-line

26.11.2020, c.2

Temat. Parametry rozkładu c.d.

Przykład c.d.

3°. $X \in B(np)$.

Skonstruujmy z zasady addytywności dla X :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \text{ gdzie}$$

(i) X_j - niezależne stochastyczne

$$(ii) d_{X_j} = d_{X_0}, \quad X_0: \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array}$$

Z liniowości i P.1 mamy:

$$EX = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n =$$

$$= \underbrace{EX_0 + EX_0 + \dots + EX_0}_{n \text{ razy}} = \underbrace{q + q + \dots + q}_n + \underbrace{p + p + \dots + p}_n$$

$$= np$$

$$h^0. \quad X \sim P(\lambda)$$

$$\text{Then } X(n) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$P(\{n \in N: X(n) = k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k P(\{n \in N: X(n) = k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^n k \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\text{Also } \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!} \quad (k-1=j)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\lambda}$$

Thus EX is

$$EX = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Nerby tam popychad X v. ciggyno.

Tr. 1

Mgh' ishe cathua $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$, to

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt, \text{ qile}$$

$$F_X' = f_X$$

Pomykly

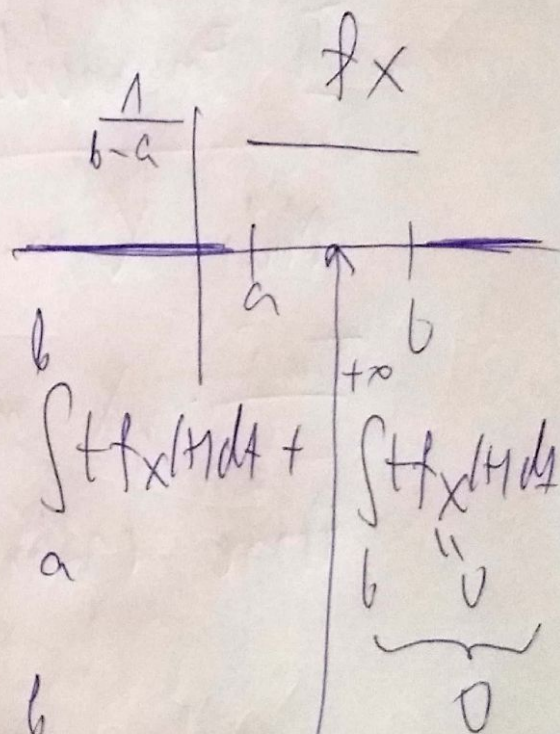
1^o $X \in \mathcal{J}(L_1, b)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^a t f_X(t) dt}_0 + \underbrace{\int_a^b t f_X(t) dt}_0 + \underbrace{\int_b^{+\infty} t f_X(t) dt}_0$$

$$= \int_a^b t \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}$$



Zad 1.

Kompletuj 2 powyższe wyniki i zasady
skalowania oblicz EX , $X \in \mathcal{I}(L_0, 1)$.

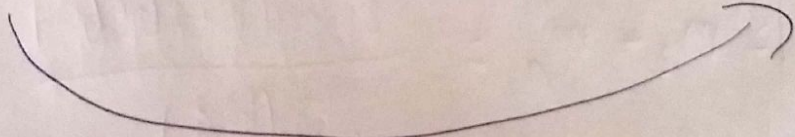
2^o $X \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Wtedy $EX = m$

Drugie moment i wariancja

Nich ponownie X oznacza zmienną losową.

Biemy operację

$$X \longrightarrow X^2 \longrightarrow E(X^2)$$


Wtedy bierzemy $E(X^2)$, o ile istnieje

nazwy 2-m momentu

$$m_2 = E(X^2)$$

Uwaga: $E(X^2) \neq (EX)^2$
 $m_2 \neq m_1^2$

Tw. 2 Npsh' m_2 idzie, bo m_1 też.

Nm X ma m_2 . Bierzemy

$$X \longrightarrow (X-m) \longrightarrow (X-m)^2$$

zajada centrowany

$$E(X-m) = 0$$

$$m = EX$$

Wtedy bierzemy $E(X-m)^2$ nazywamy

wariancją X (lub rozkładu) i oznaczamy

$\text{var}(X)$ lub σ_X^2 , czyli

$$\text{var}(X) = \sigma_X^2 = E(X-m)^2$$

Uwaga. $E(X - m)^2$ czytamy też
 "średnie kwadratów" "odchylenie"

Tw. 3 (o wariancji)

$$\text{var}(X) = m_2 - m_1^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

c' tak w praktyce liczyć $\text{var}(X)$!

Tw. 4 (własności wariancji).

1) Jeśli X ma wariancję, wtedy

$$\text{var}(cX) = c \text{var}(X) \longrightarrow \underline{\underline{\text{zadanie!}}}$$

2) Jeśli X, Y mają wariancję i są stochastycznie niezależne, to

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$

3) $\text{var}(X) \geq 0$, $\text{var}(X) = 0 \iff \underline{\underline{X = \text{const}}}$.

Problem Jak obliczyć $E(X^2)$, a nie $\text{var}(X)$.

I przykład dystrybucji.

$E(X^2)$: mając dX , musimy dX^2
i liczyć średnie wartości.

Przykład.

$$1^0 \quad dX \quad \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 9 & p \end{array}$$

$$EX$$

||

$$dX^2 \quad \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 9 & p \end{array}$$

$$E(X^2) = p$$

$$2^0 \quad dX \quad \begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{array}$$

$$dX^2 \quad \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0,3 & 0,7 \end{array}$$

$$E(X^2) = 0,7$$

3⁰ $X \in D(n, p)$. Korzystać z zasady
faktoryzacji:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

X_j - material

$$d_{x_j} = d_{x_0} : \frac{0}{9} \mid \frac{1}{p}$$

Σ tr. by mag

[illegible]

$$\text{Var}(X) = n p q$$

ZAD Xe D (n, p)

Oblini! $E(X^2)$

Zad.

Nich $X \in D(n, p)$.

Bienny $Y = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$

Oblizni: $EY, \text{Var}(Y)$.

II Pomyšleli mozd. cigghu.

Nich X mozd. cigghu.

Teo. 5. X mo 2-i' moment $\in$,

istye cigghu $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt$, gde

$F_X'(t) = f_X(t)$. Whery

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt$$

Punktzu

$X \in U(a, b)$. Hier, $E X = \frac{a+b}{2}$

Bleib $E(X^2)$ um $\text{Var}(X)$. $\frac{2 \text{ v. } 1}{+ \infty}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^a t^2 f_X(t) dt}_0 + \int_a^b t^2 f_X(t) dt + \underbrace{\int_b^{+\infty} t^2 f_X(t) dt}_0$$

$$= \int_a^b t^2 \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{3} (b^3 - a^3) \right] = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)}$$

" $E(X^2)$.

Skat

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= m_2 - m_1^2 = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\dots \dots \dots}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

ZAD Ungetrie! bei rechnerisch!

ZAD.

Wiedzieć, że dla $X \in \mathcal{G}(L(0,1))$

$\text{var}(X) = \frac{1}{12}$, korzystając z zasady
skalowania, wyprowadzić inną metodą
wzór na $\text{var}(Y)$, $Y \in \mathcal{G}(L(a,b))$

Należy też $X \in N(m, \sigma^2)$.

Wtedy $\text{var}(X) = \sigma^2$.

Pomysł. Obliczyć $E(X^2)$ dla $X \in N(m, \sigma^2)$.

Wiemy, że $\text{var}(X) = m_2 - m_1^2 \Rightarrow$

$$m_2 = \text{var}(X) + m_1^2 = \sigma^2 + m^2$$

Zadanie

Nich $X \in N(m, \sigma^2)$.

Biemy $Y = \frac{X-m}{\sigma}$.

Oblini! $\text{Var}(Y), E(Y^2)$.

//.