

Sł- wykład w t. on-line

27.10.2020, 13:00 - 15:00

Temat. Pojęcie rozkładu prawdopodobieństwa.

Wstęp. Wiemy, że każde ZL ma swój (co najmniej jeden) model probabilistyczny - MPK

(Ω, Σ, P) , gdzie

Ω - zbiór wszystkich wyników obserwacji ZL

Σ - zbiór zbiorów z obserwacji zdarzeń (jako σ -algebra)

P - miara zdarzeń jako funkcja prawdopodobieństwa.

Opis ten dla celów „praktycznych” - bo obliczeniowych ma swoje „wady” - wcale nie ogdł nie se lizbami!

Ponadto każde ZL można opisać wieloma różnymi MPK - mamy zatem efekt niejednoznaczności, który może być niewygodny.

Dlatego potrzebna jest kontynuacja tego opisu, która prowadzi do pojęcia rozkładu prawdopodobieństwa (RP)

Zacniemy najpierw od definicji i pomyśleć.

Na koniec podamy związek pomiędzy: ZL, MPK, RP.

I Przypadek dyskretnego rozkład. prawdop. (DRP)

Def (DRP)

Przez DRP rozumiemy każde funkcję

$$d: A \longrightarrow (0, +\infty), \text{ gdzie}$$

$$(i) \quad A = \{a_j, j \in \mathbb{N}_0\},$$

$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych

(Wtedy A p' przeliczalny!)

$$(ii) \quad d(a_j) > 0 \text{ oraz } \sum_{j \in \mathbb{N}_0} d(a_j) = 1$$

Uwaga. Jeśli dodatkowo A p' zbiorem skończonym,

to d nazywamy SRP - skończonym rozkładem prawdop.

Dalej oznaczmy $p_j = d(a_j), j \in \mathbb{N}_0$.

Jeśli d p' SRP, to możemy go zapisać w postaci tabelki:

d:

a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_n
p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

, gdzie $\sum_{j=1}^n p_j = 1$
 $p_j \in (0, 1)$.

P1. Rozkład dwu-punktowy

$$A = \{a, b\}, \quad |A| = 2$$

$$d(a) = p, \quad d(b) = q, \quad p + q = 1, \quad p, q \in (0, 1)$$

a	b
p	q

Gdy $a=1, b=0$, to mówimy o standardowym
 rozkład. 2-punktowym

0	1
q	p

P2. $B(n, p)$ - rozkład Bernoulliego (związany z dwumianowym), gdzie $n \geq 2, p \in (0, 1)$

Wtedy $A = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$p_k = d(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in A$$

ZAD 1.
 Skonogo $\sum_{k=0}^n p_k = 1$?

P.3 Blemny

d:

-1	0	2	5
0,1	0,2	0,3	0,4

Dalej pokazujemy, ze kazdy DRP mozna opisac
 w inny sposob — za pomoca funkcji dystrybuanty

Def2 (DYSTRYBUANTY)

Kazda funkcja

$F: \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$, ktora jest:

(i) niemalejaca, a m.l

$\forall_{x_1, x_2} \quad x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F = 1$

(Przy przypomniec sobie pojecie GRANICY FUNKCJI!)

(iii) co najmniej kwadratowo ciągła, czyli

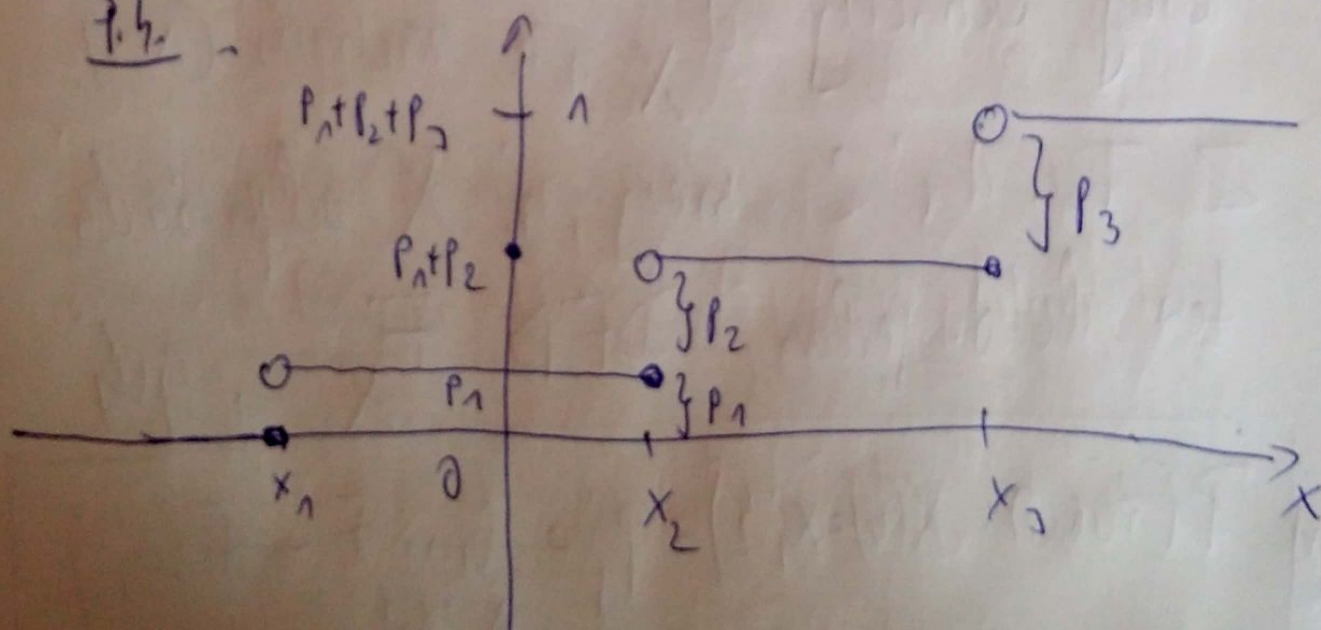
$$\forall x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} F = F(x_0)$$

nazwijemy funkcję dystrykcyjną (FD).

Myślimy dodatkowo:

(iv) F p' przedziałami stała, czyli $\mathbb{R}$ można podzielić przedziałami, na których F p' stała, do mędy, i' FD p' dyskretna (DFD).

Pr. 4.



Zauważ, że F z powyższego rysunku jest DFD.

- punkty x_1, x_2, x_3 dzielą $\mathbb{R}$ na przedziały

$$I_1 = (-\infty, x_1)$$

$$I_2 = (x_1, x_2)$$

$$I_3 = (x_2, x_3)$$

$$I_4 = (x_3, +\infty).$$

- Na każdym I_j F jest stała

- F jest niemalejącą (DLACZEGO?)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = 1$ (DLACZEGO?)

- $\tilde{F}$ jest (co najmniej) lewosłownie ciągła (DLACZEGO?)

Ponadto zauważ, że

(i) W każdym punkcie x_j w lewym obserwujemy „skok”

$$\lim_{x \rightarrow x_j^+} F - \tilde{F}(x_j) = p_j - \text{miara skoku}$$

$$\text{czyli } \sum p_j = 1$$

(i') Mając DFD mamy dwa zbiory:

zbiór składek $\{x_j\}$

zbiór miar tych składek $\{p_j\}$

Oraz zmierzal pomiędzy nimi:

x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_1	p_2	$\dots$	p_n

p_1 p_2 $\dots$ p_n , gdzie $\sum p_j = 1$.

Mamy też

$TW \cap (\emptyset \text{ zmierzal pomiędzy } \bar{F} \text{ a } d)$

Dla każdej DFD $\bar{F}$ istnieje dokładnie jeden rozkład przed. d o ustosunkach j.u.

$\bar{F} \longrightarrow d$.

Pokażemy teraz, że p nieodwrócić!

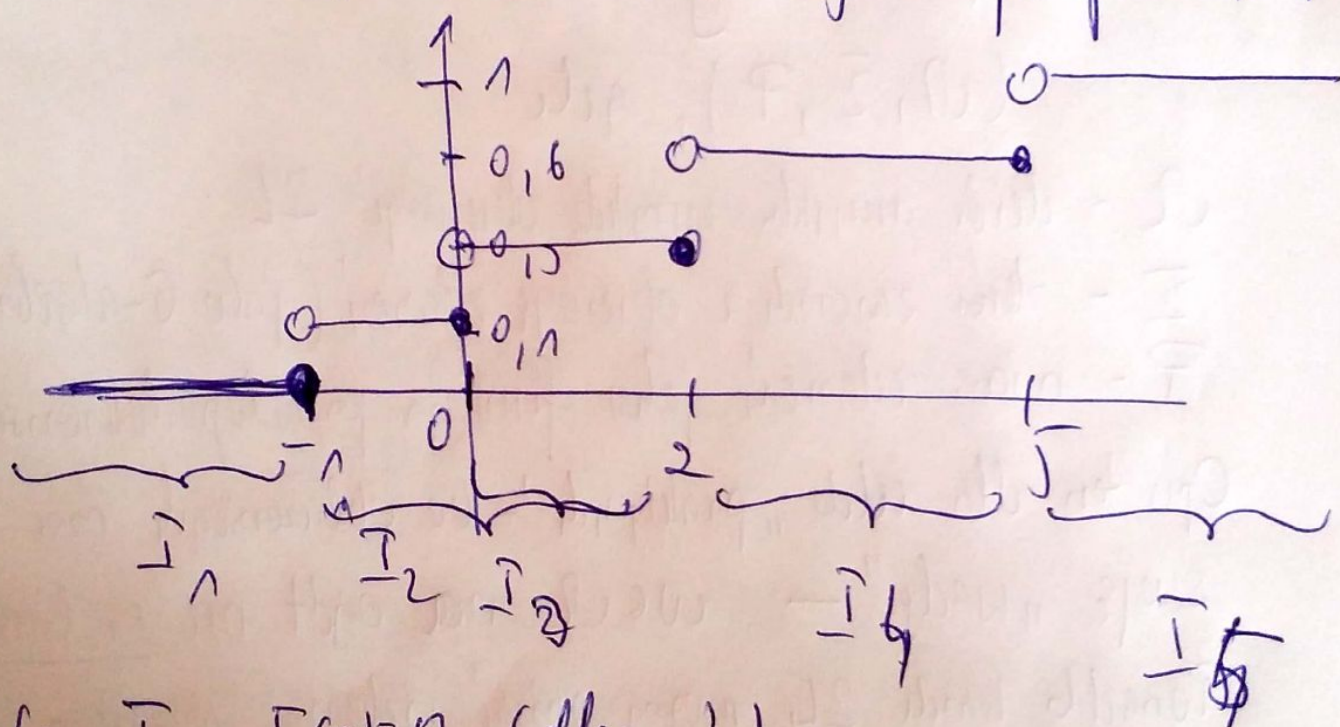
Łatwiej będzie nam pokazać to na przykładzie.

Niemą dane z P3

d:

-1	0	2	5
0,1	0,2	0,3	0,4

Dane z 1-go wiersza tabeli wyznaczają przedział R :



Na I_1 $F(x) = 0$ (dlaczego?)

I_5 $F(x) = 1$ (dlaczego?)

Na I_2 $F(x) = 0,1$ (dlaczego?)

I_3 $F(x) = 0,3$ (dlaczego?) - skok 0,2

I_4 $F(x) = 0,6$

Tv.2

Dla każdego DRP istnieje dokładnie jedno DFP
o wartościach j.v.

WNIOSEK

Z Tv.1 & Tv.2 $d \longleftrightarrow F$

~~Czas~~ Zatem F i d są nośnikami tych
samych informacji.

Czas na poziomie F, d to ZL , a
nie MPK .

POJĘCIE ZMIENNEJ LOSOWEJ

Mówiąc, że mamy ZMIENNĄ LOSOWĄ, $\tilde{x}$,
jesh'

(i) dane p ZL , a nie MPK
(Ω, Σ, P)

(ii) dane p odwrócone

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, take, i

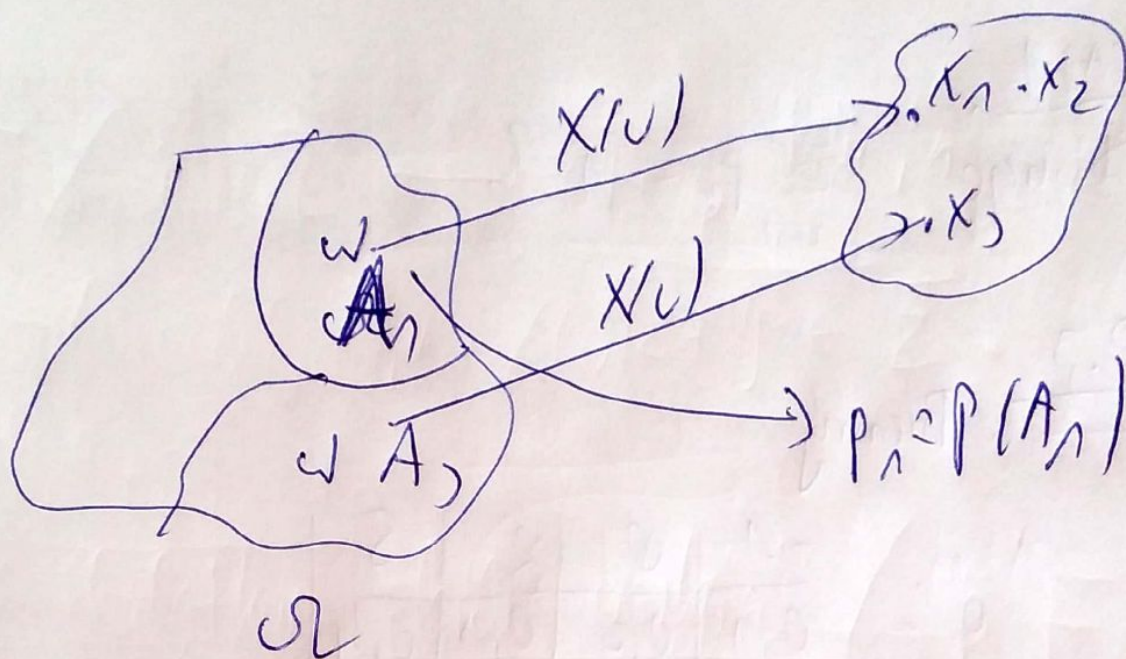
$\forall$
t.e. $\exists$ $\omega \in \Omega: X(\omega) < t \in \Sigma$.

Jeli dodatkowo zbiór wartości X p'
przeliczny, to mówimy że zmienne losowa X
p' dystrykcyjna.

Nich daję X być może dystrykcyjna, czyli
 $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

Zatem dodatkowo, i $X(\Omega)$ p' skonieczny,
czyli $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Wtedy kładę $1 \leq j \leq n$ mieć



$$A_j = \{ \omega \in \Omega : X(\omega) = x_j \}, \quad j=1, \dots, m.$$

Wichtig: Ereignisse & Elemente von $A_1, \dots, A_m$.

Zu zeigen:

$$(i) \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

$$(ii) \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = \Omega.$$

Nach $P_j = P(A_j)$, für $j=1, 2, \dots, m$
 c' werden dabelts

$$d: \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & & p_n \end{array}$$

Zauważ, iż tabelka dla p' określającym
prawdopodobieństwa, gdzie

$$(*) \quad d(x_j) = p_j = P(\text{zuer: } X(u) = x_j),$$

Zatem nadaliśmy lincom p_j
probabilistyczną interpretację!

Tv. 2

Każdej dystrykcji zm. losowej X odpowiadają
dokładnie jeden (bo jej) rozk. prawdop.,

który oznaczamy d_X , a zachodzi (*).

Z Tv. 1 i 2 mamy, iż X odpowiadają
też dokład. jeden DFD F_X , gdzie

$$(**) \quad P(\text{zuer: } X(u) = x_j) = p_j = \lim_{x \rightarrow x_j^+} F - F(x_j)$$

Aby ten teorema dostatek potrzebny tr.
odwrotnego do 7.3.

Tw. 4.

Dla każdego $\mathcal{A}$ rozkładu $\mathcal{A}$, a nie
i DFD $\neq$ istnieją:

(i) co najmniej jedno ZL

(ii) co najmniej jeden MOK $(\Omega, \bar{z}, P)$

(iii) dyskretny zm. losowa X , z

$X(\Omega) =$ zbiór będący dziedziną $\mathcal{A} =$
zbiór wszystkich zdarzeń $\bar{F}$

Zachodzą warunki (xx).

Konkretnie wynika, że istnieją Tw. 4 na
przykładach

Príklad

Wtedy tabelki

$$d: \begin{array}{c|c|c|c} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \end{array}$$

Σ do 4 wyników

- Istnieje ZL i jej model $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, w
wyniki obserwacji („itku”) można
przetłumaczyć na „mre” za pomocą X

$$A_{-2} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) = -2\} \quad P(A_{-2}) = 0,1$$

$$A_{-1} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) = -1\}$$

$$A_0 = \{\omega \in \Omega: X(\omega) = 0\}$$

$$A_1 = \{\omega \in \Omega: X(\omega) = 1\}$$

ZATEM X pełni rolę „tłumacza”, interpretatora

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow \underbrace{X(\omega) \in \mathcal{H}}_{\text{LICZBA}}$$