Rozwiązanie zadań z Kolokwium
z dnia 14.01.2021.

TP1. Aby wyznaczyć d_Y znajdźmy $Y(\Omega)$ - zb. wartości Y oraz partycję Ω: $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ odpowiadającą $Y(\Omega)$:

mamy kolejno:

$$\left.\begin{aligned}
\{\omega\in\Omega: X(\omega)=-1\} &= \{\omega\in\Omega: Y(\omega)=7\}\\
\{\omega\in\Omega: X(\omega)=0\} &= \{\omega\in\Omega: Y(\omega)=5\}\\
\{\omega\in\Omega: X(\omega)=1\} &= \{\omega\in\Omega: Y(\omega)=3\}\\
\{\omega\in\Omega: X(\omega)=2\} &= \{\omega\in\Omega: Y(\omega)=1\}.
\end{aligned}\right\} \text{partycja}$$

Stąd

	7	5	3	1
d_Y:	0,1	0,3	0,2	0,4

Skąd $A = \{\omega\in\Omega: Y(\omega) = 3 \vee 5\} =$

$= \{\omega\in\Omega: Y(\omega)=3\} \cup \{\omega\in\Omega: Y(\omega)=5\}$,

i dalej $P(A) = 0,2 + 0,3 = \underline{0,5}$

$var(Y) = E(Y^2) - (EY)^2$

d_{Y^2}	7^2	5^2	3^2	1^2
	0,1	0,3	0,2	0,4

$E(Y^2) = 7^2 \cdot 0,1 + 5^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,4$

$E(Y) = 7 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4$

TP2.

Nech (Ω, Σ, P), na ktorom zadef. je X, a teda Y.

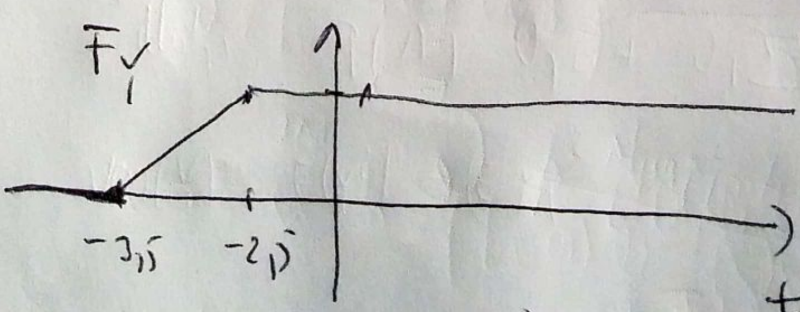
$F_Y(t) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) < t\}) = P(\{\omega \in \Omega : \frac{1}{2}X - 3 < t\})$

$= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 2(t+3)\}) = F_X(2t+6)$

Preto Y má rozdelenie spojité.

Nech $u = 2t+6$. Potom ~~[illegible]~~

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & u \le -1 \equiv t \le -3,5 \\ t + 3,5 & -1 < u \le 1 \equiv -3,5 < t \le -2,5 \\ 1 & 1 < u \equiv -2,5 < t \end{cases}$$



Ponieważ Y ma rozkład ciągły, to

$P(A) = P(\{-0,5 \le Y(\omega) < 1,5\}) =$

$= F_Y(1,5) - F_Y(-0,5) = 1 - 1 = 0$

Wreszcie

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)dt, \quad \text{gdzie}$$

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-3,5; -2,5] \\ 0, & t \notin \ \ ) \end{cases}$$

dlatego

$$EY = \int_{-\infty}^{-3,5} 0 + \int_{-3,5}^{-2,5} t(t+3,5)dt + \int_{-2,5}^{+\infty} 0$$

$$= \tfrac{1}{3}t^3 + \frac{3,5}{2} \cdot t^2 \Big]_{-3,5}^{-2,5}$$

SM1 Dla danego α, konstruujemy zm. losowe

Z_1, Z_2:

a) $Z_1 < Z_2$

b) $P(\{\omega \in \Omega: Z_1(\omega) < m < Z_2(\omega)\}) = 1-\alpha$

Przy założeniach jak w treści zadania

$$Z_1 = \overline{X}_n - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$Z_2 = \overline{X}_n + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \text{gdzie:}$$

$n = 5, \quad \sigma = \sqrt{6}$

Ponieważ $(-2{,}5,\ -1{,}5,\ 0,\ 1{,}4,\ 2{,}0) = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)(\omega_0)$

$$\overline{X}_5(\omega_0) = \frac{1}{5}(-2{,}5 + (-1{,}5) + 0 + 1{,}4 + 2{,}0) =$$

$= -0{,}12$ oraz

$\Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha) = 1-\alpha \iff$

$\Phi(u_\alpha) - (1 - \Phi(u_\alpha)) = 1-\alpha \iff$

$2\Phi(u_\alpha) = 2-\alpha \iff \underline{\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}}$

4

Kvantily z tabulek $N(0,1)$:

dla $\alpha = 0{,}1$, $1-\frac{\alpha}{2} = 1-0{,}05 = 0{,}95$,

dlatego $u_\alpha = 1{,}65$

Stąd

$m \in (Z_1(V_0), Z_2(V_0))$ z pr. $0{,}9$ $\equiv$

$m \in \left(-0{,}12 - 1{,}65\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}, -0{,}12 + 1{,}65\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)$ z pr. $0{,}9$ $\equiv$

$m \in (-0{,}12 - 1{,}807, -0{,}12 + 1{,}807)$ z p. $0{,}9$

$\equiv m \in (-1{,}927, 1{,}687)$ z pr. $0{,}9$

SM2

Z tego SM1:

$$m_0 = \frac{1}{2}(-1{,}927 + 1{,}687) = -0{,}12$$

Dalej

$H_0: m = -0{,}12$ przeciwko $H_1: m \neq -0{,}12$

Przy założeniu H_0, obszar krytyczny wyznaczony przez

$$Z = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n}\Big|_{\substack{m=m_0\\ n=5\\ \sigma=\sqrt{6}}}$$

ma postać:

$$C_\alpha = (-\infty, -n_\alpha) \cup (n_\alpha, +\infty), \text{ gdzie}$$

$$n_\alpha = 1{,}65 \quad (\text{bo } \alpha = 0{,}1)$$

Weryfikujemy H_0:

$$Z(\upsilon_0) = \frac{\bar{X}_5(\upsilon_0) - (-0{,}12)}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5} = (-0{,}12 + 0{,}02)\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$+0{,}1$

$$= -0{,}09 \notin C_\alpha, \text{ więc}$$

weryfikacja jest nierozstrzygnięta.

6