Kurs SPC

Wykład 7 i 8

Temat. Przegląd kart ciągłych. Zdolności procesu produkcyjnego.

Wstęp.

Karty k. dla cechy ciągłej X stosujemy w przypadkach, gdy:

(i) cecha ma charakter pomiarowy (np. dł., średnica, ciężar),

$X(\omega)$ - wynik pomiaru

(ii) $X \in N(m, \sigma^2)$, a nc

$X(\Omega) = I$ - przedział liczbowy.

(iii) pobieramy k ($k \geq 2$) n-elem. próbek

Wyniki j-tej próbki:

$$(X_1^j, X_2^j, \ldots, X_n^j)(\omega_0) = (x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j),$$

$j = 1, 2 \ldots k$

Wtedy $\overline{X}_j(\omega_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j(\omega_0)$ - w. średnia cechy X w j-tej próbce.

$\overline{\overline{X}}(\omega_0) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \overline{X}_j(\omega_0)$ - wartość średnia z w. w poszczególnych próbkach.

Karta $\overline{X} - R$

Najczęściej stosowana. Analizuje się dane wartości: $\overline{X}_j$ ($j = 1, \dots, k$)
oraz R_j – rozstęp w próbce, gdzie

$$R_j = x_{max}^j - x_{min}^j, \quad \overline{R} = \frac{1}{k} \sum R_j$$

x_{max}^j – wart. największ. w próbce; x_{min}^j – wart. najmn. w próbce.

Dane dla karty $\overline{X}$: $LC = \overline{\overline{X}}$ (ν_0)

$$GGI = LC + A_2 \overline{R}$$
$$DGI = LC - A_2 \overline{R},$$

gdzie A_2 jest tzw. współczynnikiem statystycznym (p. przykład 1)

Dla karty $\overline{R}$:

$$LC = \overline{R}$$
$$GGI = D_4 \overline{R}$$
$$DGI = D_3 \overline{R},$$ gdzie D_3, D_4 – c.d. współczynniki statystyczne.

P.1 Wyniki pomiarów 10 serii 100 szlifowanych wałków.
Ustalono eksp. wartości wskaźników A_2, D_3, D_4:
Karta $\overline{X} - R$ składa się z dwóch części: dla $\overline{X}$ (wyśrodkowanej)
i dla R – (rozproszenia).

(3)

karta dla cechy ciągłej X-R

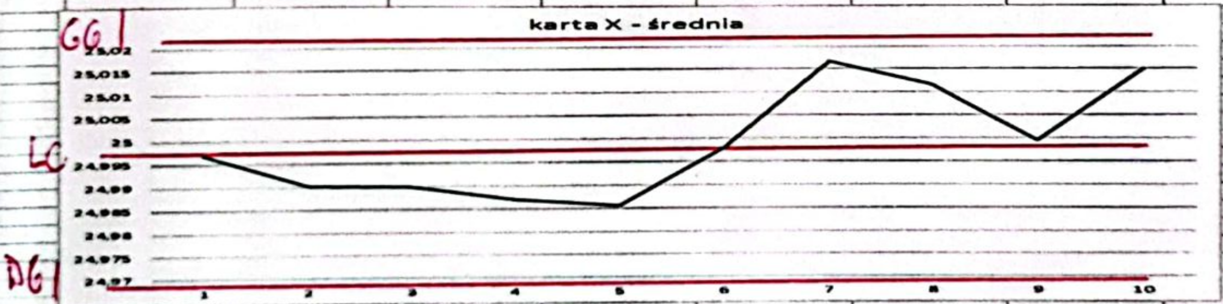
pomiar/nr serii	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	24,903	24,926	25	24,883	24,967	25,01	24,97	25,069	24,987	24,998
2	25,006	25,026	24,998	25,018	24,972	24,943	25,014	25,064	24,946	25,03
3	25,055	25,056	25,046	25,074	25,007	25,02	24,95	25,015	25,005	24,991
4	24,927	24,978	24,938	24,936	24,964	24,968	25,09	25,016	24,962	25,027
5	25,04	24,917	24,989	25,029	25,11	25,007	24,997	25,004	25,07	25,021
6	25,013	25,019	24,994	24,975	25,01	25,014	24,95	25,009	25,006	24,887
7	25,041	25,041	24,967	25,012	24,953	25,018	25,071	25,032	24,914	25,059
8	24,974	25,041	25,023	24,927	24,925	25,042	25,023	25,003	25,048	25,003
9	24,98	24,947	25,007	25,031	24,957	24,963	25,008	24,965	24,994	25,003
10	25,028	24,949	24,936	24,985	24,991	24,995	25,094	24,939	25,063	25,132

nr serii	x_min	x_max	Ri	średnia Ri	średnia próby	średnia z średnich
1	24,903	25,055	0,152	0,1551	24,9967	24,999
2	24,917	25,056	0,139		24,99	
3	24,936	25,046	0,11		24,9898	
4	24,883	25,074	0,191		24,987	
5	24,925	25,11	0,185		24,9856	
6	24,943	25,042	0,099		24,998	
7	24,95	25,094	0,144		25,0167	
8	24,939	25,069	0,13		25,0116	
9	24,914	25,07	0,156		24,9995	
10	24,887	25,132	0,245		25,0151	

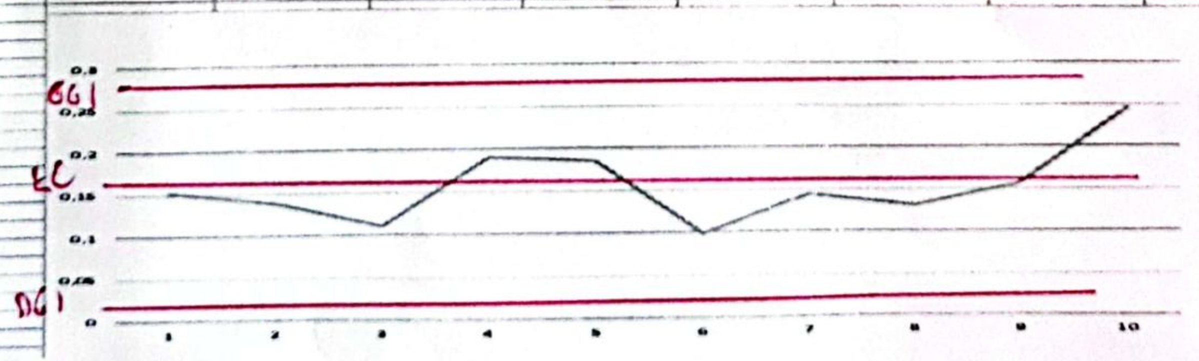
wartości statystyczne współczynników empirycznych dla n=10

A2	D3	D4
0,308	0,223	1,777

parametry karty średnia cechy		parametry karty R	
LC	24,9990	LC	0,1551
GGI	25,0468	GGI	0,2756
DGI	24,9512	DGI	0,0346



karta R - rozstęp



Karta $\bar{X}$ – s

Analizujemy 2 wartości cechy X: średnią próby $\bar{X}$ oraz odchylenie standardowe próbki s

Wyniki j-tej próbki:

$$(X_1^j, X_2^j, \dots, X_n^j)(\omega_0) = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j),$$
$$j = 1, 2, \dots, k$$

Niech $\bar{X}_j(\omega_0)$ – średnia z tej próbki

$\bar{\bar{X}}(\omega_0)$ – średnia ze średnich (dla wszystkich próbek).

Wtedy $LC = \bar{\bar{X}}(\omega_0)$ – wartość dla karty $\bar{X}$

Odchylenie s dla j-tej próbki definiujemy

$$s = s_j = \sqrt{\frac{\sum (x_j^i - \bar{x}_j^i)^2}{n-1}}$$

Wtedy dla karty $\bar{X}$:

$$GGl = LC + A_3 \bar{s}$$

$$DGl = LC - A_3 \bar{s}, \text{ gdzie}$$

$$\bar{s} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j \text{ (średnia odchyleń)},$$

A_3 – empiryczny współcz. statystyczny. (z. pzylułem)

Dla karty s:

$$LC = \bar{s}$$

$$GGL = B_4 \bar{s}$$

$$DGL = B_3 \bar{s},$$

gdzie B_3, B_4 - empiryczne wsp. statystyczne.

Uwaga. Karty $\bar{X}$-s stosujemy, gdy podgrupy mają ≥ 10 wyrobów, wtedy s jest lepszą miarą aniżeli R

Przykład 2

Bierzemy dane pomiarowe z P1 (celem porównania metody $\bar{X}$-R i $\bar{X}$-s).

-6-

karta dla cechy ciągłej X-s

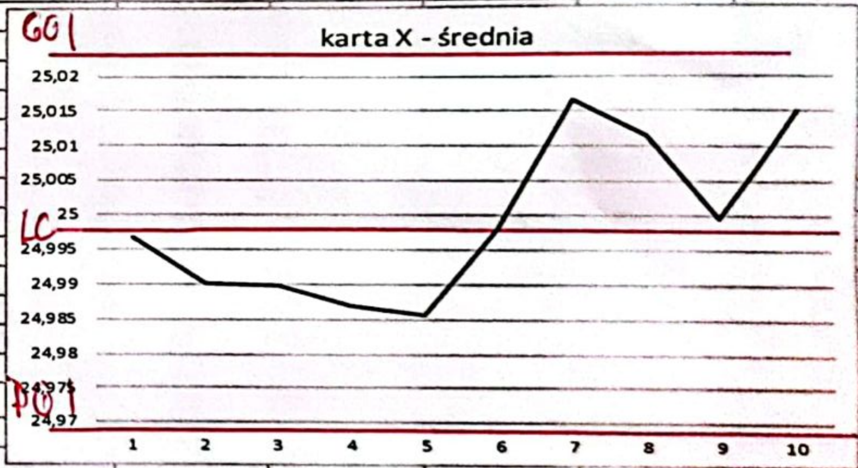
pomiar/nr serii	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	24,903	24,926	25	24,883	24,967	25,01	24,97	25,069	24,987	24,998
2	25,006	25,026	24,998	25,018	24,972	24,943	25,014	25,064	24,946	25,03
3	25,055	25,056	25,046	25,074	25,007	25,02	24,95	25,015	25,005	24,991
4	24,927	24,978	24,938	24,936	24,964	24,968	25,09	25,016	24,962	25,027
5	25,04	24,917	24,989	25,029	25,11	25,007	24,997	25,004	25,07	25,021
6	25,013	25,019	24,994	24,975	25,01	25,014	24,95	25,009	25,006	24,887
7	25,041	25,041	24,967	25,012	24,953	25,018	25,071	25,032	24,914	25,059
8	24,974	25,041	25,023	24,927	24,925	25,042	25,023	25,003	25,048	25,003
9	24,98	24,947	25,007	25,031	24,957	24,963	25,008	24,965	24,994	25,003
10	25,028	24,949	24,936	24,985	24,991	24,995	25,094	24,939	25,063	25,132

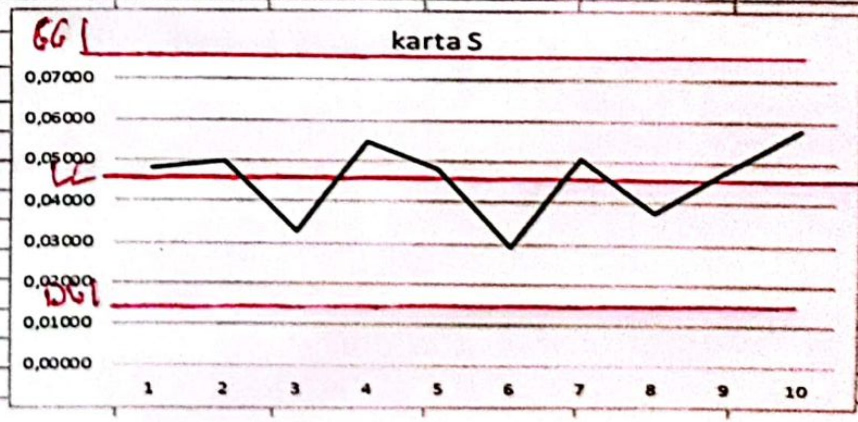
nr serii	średnia próby	średnia z serii	sj	średnia sj
1	24,9967	24,999	0,04796	0,04571
2	24,99		0,04979	
3	24,9898		0,03293	
4	24,987		0,05479	
5	24,9856		0,04807	
6	24,998		0,02909	
7	25,0167		0,05088	
8	25,0116		0,03751	
9	24,9995		0,04816	
10	25,0151		0,05794	

wartości statystyczne współczynników empirycznych dla n=10

A3	B3	B4
0,975	0,284	1,716

parametry karty średnia cechy		parametry karty s	
LC	24,9990	LC	0,0457
GGI	25,0436	GGI	0,0784
DGI	24,9544	DGI	0,0130





Zad. Skonstruować arkusze dla kart X-R i X-s na podst. danych podanych w PA&2. Dokonać interpretacji analizy tych kart.

ZDOLNOŚĆ PROCESU PRODUKCYJNEGO (ZPP)

Analiza ZPP odpowiada na pytanie:

na ile jest on zdolny spełniać zadania wyznaczone specyfikacją.

Nie wystarcza, że proces wykazuje stabilność i jest uregulowany. Jego naturalna zmienność musi zawierać się nie tylko w granicach kontrolnych (DGK, GGK), ale również w granicach tolerancji. Dokładnie, warunkiem ZPP jest to, aby szerokość pasa naturalnej zmienności stanowiła część szerokości pasa tolerancji.

Do ustalenia ZPP konstruuje się:

- C_p - wskaźnik zdolności (rozrzutu) procesu
- C_{pk} - wskaźnik wycentrowania procesu
- C_{pm}, C_{pmk} - wskaźniki położenia procesu względem WD.

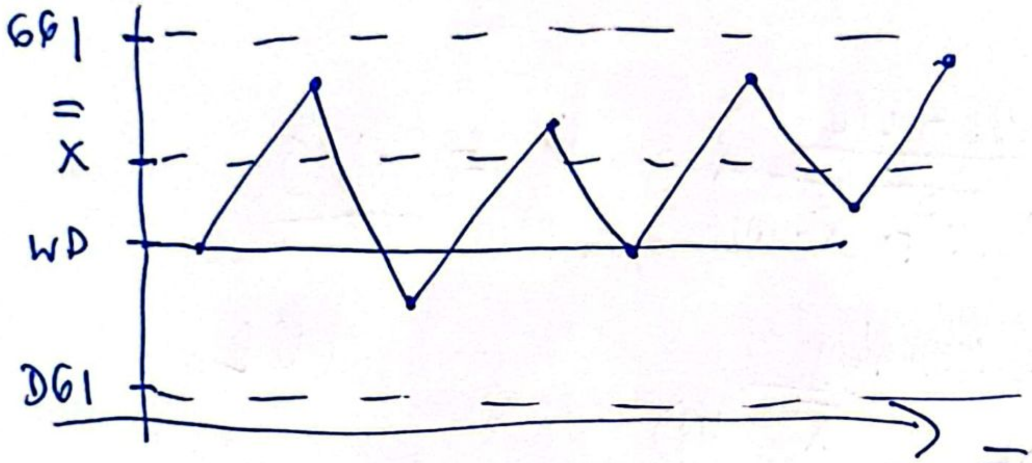
Wskaźnik C_p

Def. $C_p = \frac{USL-LSL}{6\sigma}$, USL - górna granica specyfikacji

LSL - dolna granica specyfik.

σ - odchylenie standardowe zmienności własnej ($\sigma = \sqrt{\mathrm{var} X}$)

C_p stosuje się dla przypadku produkcji seryjnej, w okresie długoterminowym, gdy proces jest ustabilizowany (przebiega między granicami kontrolnymi)



Proces ustabilizowany (też może $WD \neq \bar{\bar{X}}$)

Na tym etapie stosuje się karty $\bar{X}-R$.

Wtedy $\sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}$, d_2 – wsp. statystyczny

liczebność próbki	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_2	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704	2,847	2,970	3,078

Na etapie krótkoterminowym (przed uruchomieniem p. seryjnej, gdy proces nie jest ustabilizowany)

$$\sigma = s, \text{ i wtedy } C_p = P_p.$$

C_p jest miarą rozrzutu wartości pomiarów X wokół jej wartości średniej. Warunek graniczny: $C_p > 1$, czyli

$$\underbrace{USL - LSL}_{\text{szerok. pasa tolerancji}} > 6\sigma$$

Dalej pokażemy jak wykorzystuje się C_p.

<u>Wskaźnik C_{pk}</u>

Niech LSL, USL – granice specyfikacji.

Definiujemy: $C_{pl} \stackrel{df}{=} \frac{\bar{X}-LSL}{3\sigma}$, $C_{pu} = \frac{USL-\bar{X}}{3\sigma}$,

gdzie ~~jest~~ $\bar{X}$ – średnia z cechy X, σ – dyspersja.

Wtedy $C_{pk} = \min\{C_{pl}, C_{pu}\}$

Uwagi. 1°. Wskaźnik ten używa się do celów rozpoznania, czy proces jest wycentrowany, czyli $\bar{X} = WD$.

Mianowicie tak jest, gdy

$$C_{pk} = C_p \Rightarrow X \text{ wycentrowany},$$

bowiem wtedy $\bar{X} = \frac{1}{2}(LSL + USL)$

2°. $C_{pk} < C_p \Rightarrow X$ nie jest wycentrowany i efekt niewycentrowania zwiększa się proporcjonalnie do różnicy $C_p - C_{pk}$

3°. C_{pk} musi być większy od 1

4°. na etapie oceny długoterminowej, $\sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}$ (jak dla C_p)

liczonej jako $\sqrt{\text{var} X}$. Wtedy oznaczamy go przez P_{pk} ($= C_{pk}$)

5°. Jak widać, w def C_{pk} nie ma WD, bowiem zakłada się, że $WD = \frac{1}{2}(LSL + USL)$.

W sytuacji, kiedy tak nie jest, definiuje się tzw. wskaźniki położenia procesu: C_{pm} ~~[illegible]~~

Wskaźnik C_{pm}

Z założenia konstrukcji procesu produkcyjnego

$$WD \in (LSL, USL)$$

Z definicji
$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\tau} \quad \text{(gr. litera „TAU")},$$

gdzie

$$\tau^2 = E(X - WD)^2 \quad \left(\text{wiadomo, że } \sigma^2 = E(X - \bar{X})^2 \text{ ale nie zawsze } \bar{X} = WD \,(!!)\right).$$

Zatem
$$\tau^2 = E\left((X - \bar{X}) + (\bar{X} - WD)\right)^2 =$$

$$= E(X-\overline{X})^2 + E(\overline{X}-ND)^2 + 2\underbrace{E(X-\overline{X})(\overline{X}-ND)}_{=0}$$

stąd

$$\boxed{\tau^2 = \sigma^2 + (\overline{X}-ND)^2}$$

Dlatego

$$C_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\tau} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{\sigma^2+(\overline{X}-ND)^2}}$$

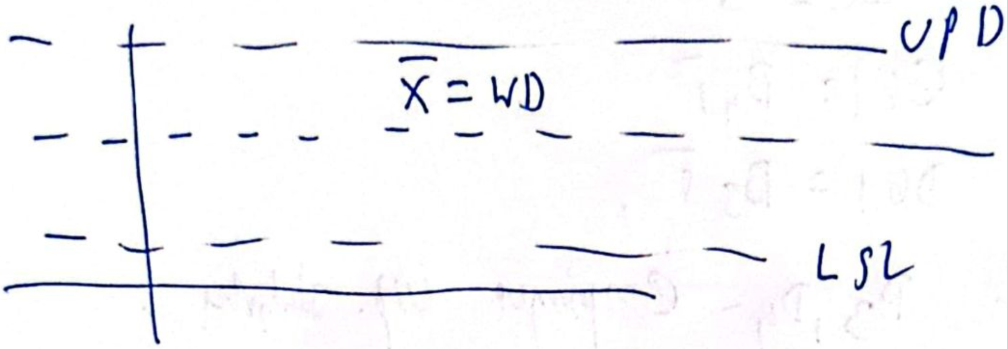
lub po podzieleniu

$$C_{pm} = \frac{\overbrace{\left(\frac{USL-LSL}{6\sigma}\right)}^{=C_p}}{\frac{1}{\sigma}\sqrt{\sigma^2+(\overline{X}-ND)^2}} = \frac{C_p}{\sqrt{1+\left(\frac{\overline{X}-ND}{\sigma}\right)^2}}$$

Biorąc $\xi^2 = \left(\frac{\overline{X}-ND}{\sigma}\right)^2$, ostatecznie

$$\boxed{C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1+\xi^2}}}$$

Uwagi: 1) $\bar{X} = WD \Rightarrow C_{pm} = C_p$



2). C_{pm} powinno być > 1

Gdy $\bar{X} - WD$ rośnie, to C_{pm} maleje.

Przykład obliczania wskaźników zdolności C_p i C_{pk}

Dane: Zmierzono średnicę $n = 100$ el. o specyfikacji

$LSL = 29,9$ (mm)

$USL = 30,1$ [mm]

i uzyskano: $\bar{X} = 29,95$ [mm], $\sigma = 0,01$ [mm].

Mamy odpowiednio:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{30,1 - 29,9}{6 \cdot 0,01} = 3,33$$

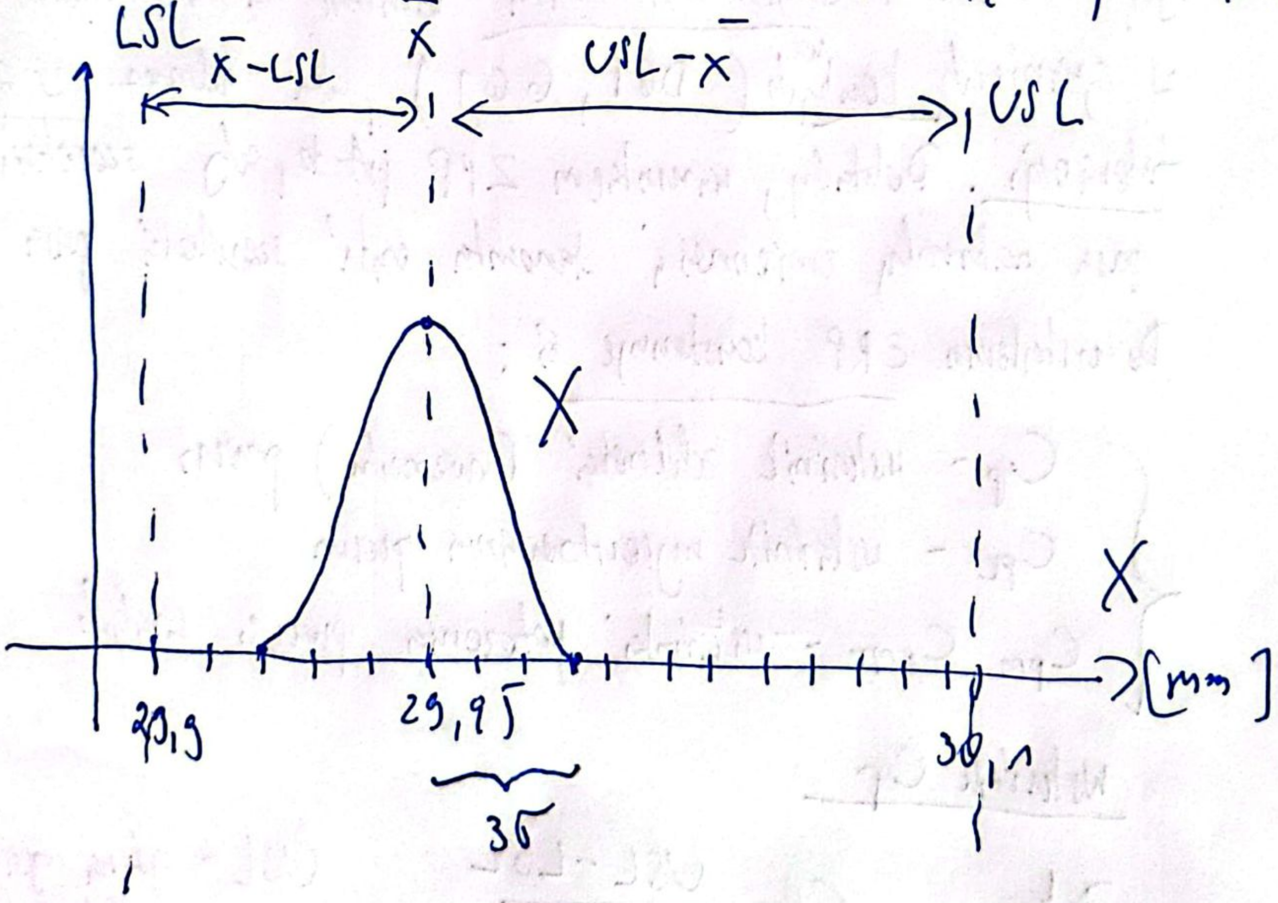
$$C_{pl} = \frac{\bar{X} - LSL}{3\sigma} = \frac{29,95 - 29,9}{3 \cdot 0,01} = 1,67$$

$$C_{pu} = \frac{USL - \bar{x}}{3\sigma} = \frac{30,1 - 29,95}{3 \cdot 0,01} = \underline{5}$$

$$C_{pk} = \min\{C_{pu}, C_{pl}\} = \min\{1,67 ; 5\} = \underline{1,67}$$

Komentarz:

Mamy sytuację jak na rys. ($X \in N(m, \sigma^2)$, $m = 29,95$, $\sigma = 0,01$)



1°. σ jest małe w stosunku do zakresu: LSL, USL

2°. C_p i C_{pk} wskazują tej rozbieżność, a nie $\bar{X} \neq WD$
Tutaj $WD = 30$ (mm).

3°. Po identyfikacji przyczyny i jej usunięciu proces X będzie b. dobry!

Przykład obliczenia C_{pm}

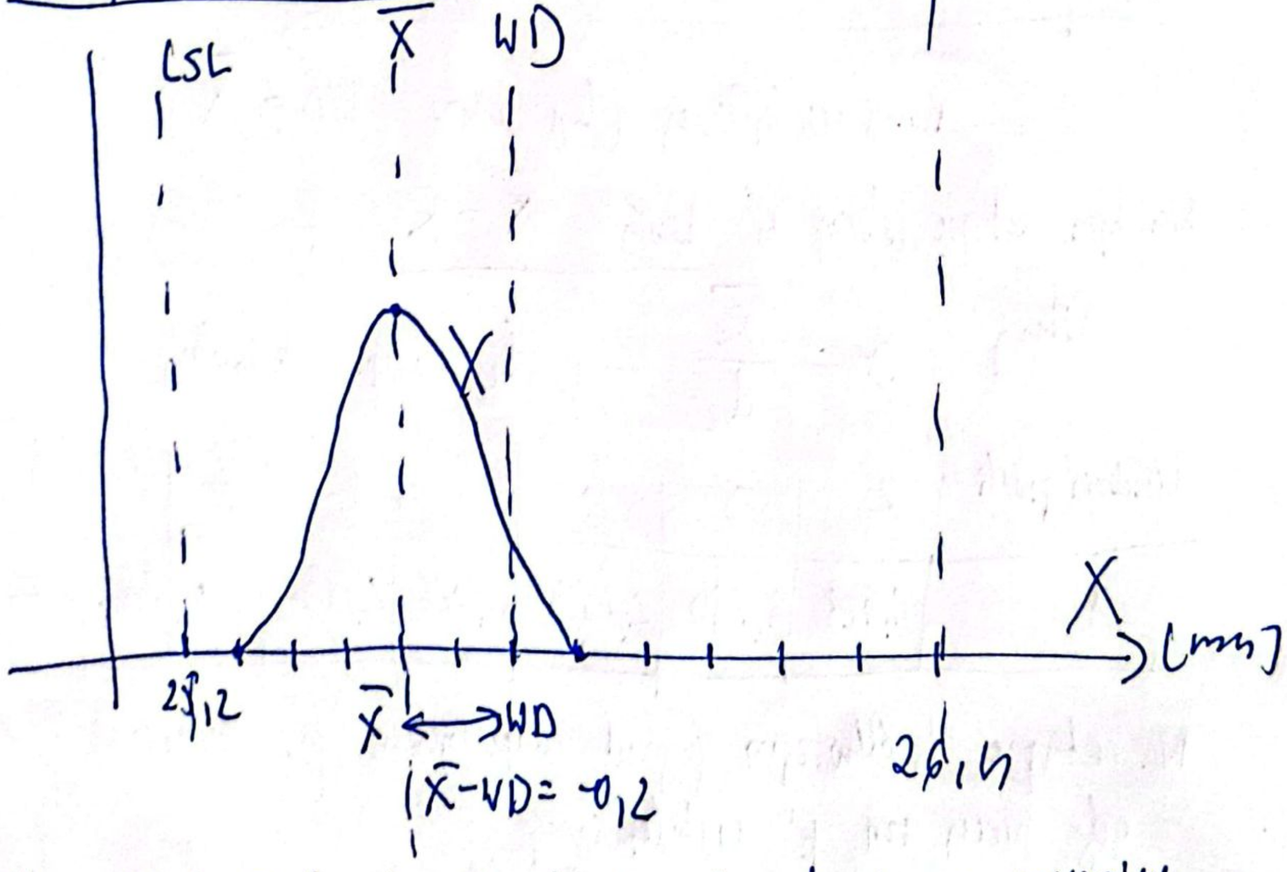
Dane: $LSL = 25{,}2$; $USL = 26{,}4$, $\sigma = 0{,}1$, $\bar{x} = 25{,}6$

$WD = 25{,}8$

Wzory

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\bar{x} - WD)^2}} = \ldots = \underline{\underline{0{,}9}}$$

Ilustracja i komentarz



1) Wartości $C_p (=2)$, $C_{pk} (= 1{,}33)$ wskazują na przesunięcie położenia $\bar{x} \Longleftrightarrow WD$, ale nie pokazują jak dużo wyników pomiarów odbiega od WD.

2. $C_{pm} = 0{,}9 < 1$ informuje, iż dużo wyników jest za dużo !!!