

Finanse i Rachunkowość

studia stacjonarne

lista nr 8

*zastosowania metod teorii funkcji rzeczywistych
w ekonomii
(część I)*

1 Funkcja popytu

Z podstaw mikroekonomii wiadomo, że zapotrzebowanie na dane dobro Y zależy od: X_1 – dochodu konsumenta, X_2 – ceny tego dobra oraz X_3, X_4, \dots, X_n – ceny dóbr pokrewnych (komplementarnych lub substytucyjnych).

Matematycznie zapisujemy to w postaci relacji $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Jeśli zmierzmy wartości liczbowe występujących w tej relacji zmiennych to otrzymamy odpowiednio:

- y – ilość dobra w jednostkach;
- x_1 – dochód konsumenta w zł,
- x_2 – cena dobra w zł,
- x_j – ilość dobra pokrewnego w jednostkach,

i wtedy liczbową zależność pomiędzy czynnikami wpływającymi na popyt a wielkością tego popytu dana będzie tzw. *funkcją rzeczywistą wielu zmiennych*

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ gdzie } x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Dalej posłużymy się zasadą *ceteris paribus*, zakładając, że spośród argumentów funkcji f tylko dwa pierwsze będą zmieniały się. Oznacza to, że będziemy mówili o dwóch sytuacjach, kiedy popyt jest tylko funkcją dochodu – *popyt dochodowy* f_d lub ceny – *popyt cenowy* f_c .

1.1 Popyt dochodowy

W tym przypadku mamy $y = f_d(x)$, gdzie $x \in D$ oznacza dochód konsumenta w zł. Z ogólnych rozważań wiadomo, że f_d spełnia co najmniej następujące warunki:

1. dziedziną $D = \mathbf{R}_+$,
2. zbiór wartości funkcji $W_{f_d} \subset \mathbf{R}_+$,

3. f_d jest różniczkowalna co najmniej dwukrotnie,
4. f_d jest co najmniej niemalejąca ($f'_d \geq 0$),
5. f_d jest o niemalejącym tempie wzrostu (f'_d jest niemalejąca, czyli $f''_d \geq 0$).

Jednym z *mierników* popytu jest jego *elastyczność*.

Definicja 1 Przez *elastyczność średnią popytu dochodowego* f_d w punkcie $x_o \in D$ rozumiemy iloraz

$$\Delta E_{x_o}^d(\Delta x) = \left| \frac{\frac{f_d(x_o + \Delta x) - f_d(x_o)}{f_d(x_o)}}{\frac{\Delta x}{x_o}} \right|, \quad \Delta x > 0.$$

Uwaga 1

1. Ze względu na warunek (4) symbol wartości bezwzględnej w definicji 1 można pominąć.
2. Interpretacja ekonomiczna $\Delta E_{x_o}^d(\Delta x)$: liczba ta wskazuje o ile procent zmieni się chęć zakupu dobra wyrażona w jednostkach, jeśli dochód konsumenta wyrażony w zł zmieni się o jeden procent.

Z matematycznego punktu widzenia lepiej jest rozważać *elastyczność dochodową chwilową*, gdzie z definicji przyjmujemy

Definicja 2 Przez *elastyczność chwilową* $E^d(x_o)$ popytu dochodowego f_d w punkcie $x_o \in D$ rozumiemy granicę przy $\Delta x \rightarrow 0$ elastyczności średniej popytu dochodowego f_d w punkcie x_o , czyli

$$E^d(x_o) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta E_{x_o}^d(\Delta x). \quad (1)$$

Z definicji pochodnej funkcji, (1) możemy napisać w postaci

Fakt 1

$$E^d(x_o) = \left| f'_d(x_o) \right| \frac{x_o}{f_d(x_o)}. \quad (2)$$

Wniosek 1 $E^d(x_o) \geq 0$ dla $x_o \in D$.

Wobec powyższego zachodzą dwa przypadki:

1. $E^d(x_o) = 0$, czyli $f'_d(x_o) = 0$, co oznacza, że zmiana dochodu konsumenta w żaden sposób nie wpływa na zmianę wielkości popytu na dobro. Mówimy wtedy, że popyt jest *szttywny*.

2. $E^d(x_o) > 0$, co prowadzi do kolejnych trzech przypadków:

- (a) $E^d(x_o) \in (0, 1)$, mówimy wtedy o popycie *nieelastycznym*;
- (b) $E^d(x_o) = 1$, co nazywamy popytem *proporcjonalnym*;
- (c) $E^d(x_o) > 1$, mówimy o popycie *elastycznym*.

Uwaga 2 Z teoretycznego punktu widzenia może zdarzyć się, że

$$\lim_{x \rightarrow x_o} E^d(x) = \infty.$$

Mówimy wtedy, że mamy do czynienia z popytem doskonale elastycznym.

1.2 Przykłady i problemy do rozwiązania

Zadanie 1

Każda z poniższych funkcji podanych w przykładzie 1 opisuje w ekonomii funkcję popytu dochodowego. Dla funkcji tych należy:

1. określić dziedziny;
2. zinterpretować ich parametry;
3. wyznaczyć asymptoty (o ile istnieją);
4. narysować ich wykresy;
5. wyznaczyć funkcje elastyczności chwilowej i narysować ich wykresy;
6. przeanalizować własności popytu pod kątem występującej elastyczności.

Przykład 1

$$f_d(x) = kx + m, \quad k \geq 0$$

$$f_d(x) = a + b \cdot \ln x, \quad b > 0.$$

$$f_d(x) = ae^{\frac{b}{x}}, \quad b < 0, \quad a > 0.$$

Przykład 2 Podane niżej funkcje w ekonomii nazywamy funkcjami Törnquista. Dla każdej z nich wykonać polecenia z zadania 1.

$$T(x) = a \frac{x}{x+b}, \quad a > 0, \quad \text{efekt popytu na dobra podstawowe.}$$

$$T(x) = a \frac{x-c}{x+b}, \quad a, c > 0, \quad \text{efekt popytu na dobra wyższego rzędu.}$$

$$T(x) = ax \frac{x-c}{x+b}, \quad a, c > 0, \quad \text{efekt popytu na dobra luksusowe.}$$

2 Popyt cenowy

Jeśli w funkcji popytu x oznacza cenę jednostkową dobra (w zł), to mówimy o funkcji *popytu cenowego* i oznaczamy go przez f_c . Wtedy funkcja ta ma własności (1)–(3) z rozdziału 1.1 oraz odpowiednio nowe: (3) f_c jest co najmniej nierosnąca ($f'_c \leq 0$) oraz (4) f_c jest o nierosnącym tempie wzrostu (f'_c jest nierosnąca, czyli $f''_c \leq 0$).

Dla f_c definiuje się *elastyczność cenową średnią i chwilową* jak w definicji 1 i 2, z uwagą, że po zdjęciu modułu wyrażenie pod modułem poprzedzamy minusem. Obowiązuje wtedy dalej nazewnictwo przedstawione po wniosku 1 i w uwadze 2.

Zadanie 2 Korzystając z przykładu 1 tak zmienić parametry funkcji aby otrzymać f_c .

Niech $y = f_c(x)$, gdzie x jest ceną jednostkową zakupu dobra w ilości y .

Definicja 3 Funkcją utargu U nazywamy funkcję, której wartości wyrażane są w zł i są postaci $U(x, y) = xy = xf_c(x)$.

Problem 1 Dla jakiej wartości ceny jednostkowej x_o utarg U osiągnie wartość największą, jeśli na danym rynku obowiązuje zasada popytu cenowego f_c ?

Rozwiązanie. Ponieważ utarg określony jest dla $x \in \mathbf{R}_+$, wartość największa funkcji U przypadnie w takim punkcie x_o , dla którego $U'(x_o) = 0$. Z zasady różniczkowania iloczynu dostaniemy

$$U'(x) = f_c(x) + xf'_c(x) = 0,$$

co oznacza, że $x_o \in D$ jest rozwiązaniem powyższego równania, czyli spełnia warunek

$$f'_c(x_o) = -\frac{f_c(x_o)}{x_o}, \quad x_o > 0.$$

Po przekształceniu oznacza to, że chwilowa elastyczność cenowa w takim punkcie musi być proporcjonalna, czyli

$$E^c(x_o) = 1.$$

Zadanie 3 Rozwiązać powyższy problem biorąc za funkcję popytu jedną z funkcji z zadania 2.