Finanse i Rachunkowość
studia stacjonarne
lista nr 9

zastosowania metod teorii funkcji rzeczywistych w ekonomii
(część II)

1 Funkcja kosztu

Z podstaw mikroekonomii wiadomo, przez *koszt calkowity* (*total cost* TC) jest to suma wynagrodzeń wszystkich czynników wytwórczych, które dzieli się na:

- *pochodzenia stałego*, które są niezależne od produkcji i wiążą się ze stałymi czynnikami produkcji (amortyzacja maszyn, odsetki za kredyt, renta za ziemie, podatek od nieruchomości itp.), stąd składnikiem TC są *koszty stałe* (*total fix cost TFC*),
- *pochodzenia zmiennego* (*total variable cost TVC*), które zmieniają się wraz z produkcją i wiążą się ze zmiennymi czynnikami produkcji (wynagrodzenia pracowników produkcyjnych, koszt surowców i energii, itp.).

Opis matematyczny kosztów całkowitych uzyskujemy za pomocą *funkcji kosztów całkowitych*, którą oznaczymy przez TC, argumentu x–wielkości produkcji wyrażonej w jednostkach, co zapisujemy

$$D \ni x \longrightarrow TC(x) = y, \tag{1}$$

gdzie y wyrażamy w zł.

Na mocy definicji ekonomicznej kategorii kosztów całkowitych, od funkcji TC wymaga się aby:

1. $$D = \mathbf{R}_+ \cup \{0\};$$
2. $$TC(0) = TFC;$$
3. TVC realizowała *zjawisko skali* – jej tempo wzrostu do pewnego poziomu produkcji było szybsze, aniżeli dalej od tego momentu.

Uwzględniając powyższe postulaty postać analityczna funkcji TC jest na ogół następująca

$$TC(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \text{ gdzie } a_2 < 0,\ a_1, a_3 > 0,\ a_o = TFC. \tag{2}$$

1.1 Koszt krańcowy

Dla ułatwienia rozważań założymy, że w obserwowanym procesie ekonomicznym wytwarzany jest tylko jeden produkt. Niech x_o oznacza wielkość produkcji w jednostkach, $TC(x_o)$ jej koszt całkowity w zł. Przypuśćmy, że w danym okresie czasu produkcja wzrosła o $\triangle x > 0$ jednostek. Wtedy koszt całkowity zmieni się i wyniesie $TC(x_o + \triangle x)$.

Definicja 1 *Przez średni koszt krańcowy AMC (average marginal cost) rozumiemy koszt jaki ponosi producent w związku ze zwiększeniem wielkości produkcji danego dobra w przeliczeniu na jednostkę produkcji. Stanowi on zatem iloraz przyrostu kosztów całkowitych związanych z produkowaniem dodatkowej ilości dobra do zmiany ilości tego dobra.*

Matematycznie treść definicji 1 zapisujemy następująco

$$AMC_{x_o}(\triangle x) = \frac{TC(x_o + \triangle x) - TC(x_o)}{\triangle x} = \frac{\triangle TC_{x_o}(\triangle x)}{\triangle x}, \tag{3}$$

gdzie przez $\triangle TC_{x_o}(\triangle x)$ oznaczyliśmy zmianę (przyrost) kosztu całkowitego, jeśli produkcja wzrosła z x_o o $\triangle x$.

Z punktu widzenia matematyki wygodniej jest rozważać tzw. *koszt krańcowy* rozumiany jako wartość *chwilowa* średniego kosztu krańcowego, czyli

$$MC(x_o) = \lim_{\triangle x \to 0} AMC_{x_o}(\triangle x) = TC'(x_o), \tag{4}$$

Dalej będziemy posługiwali się pojęciem *funkcji kosztu krańcowego* MC, gdzie z (4), $MC = TC'$.

Uwaga 1 *Kosztu marginalnego nie należy mylić z tzw. kosztem przeciętnym całkowitym ATC, gdzie z definicji jest to koszt jednostkowy - powstaje w wyniku podzielenia kosztu całkowitego przez wielkość produkcj. Dlatego*

$$ATC(x) = \frac{TC(x)}{x}. \tag{5}$$

Przykład 1 *Korzystając ze wzoru (2) możemy odpowiednio zapisać*

$$MC(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_x x^2,$$

$$ATC(x) = \frac{a_o}{x} + a_1 + a_2 x + a_3 x^2,$$

dlatego $MC(x) \neq ATC(x)$.

Definicja 2 *Każdą wielkość produkcji* x_o*, dla której wartości obu powyższych kategorii kosztów są jednakowe, czyli* $MC(x_o) = ATC(x_o)$ *nazwiemy optimum technologicznym.*

Dalej potrzebna nam jest jeszcze *kategoria zysku* P,[1] gdzie z definicji przyjmiemy, że jest to różnica pomiędzy utargiem a kosztem całkowitym, czyli

$$P = U - TC. \tag{6}$$

Z matematcznego punktu widzenia wzór (6) jest równością pomiędzy trzema funkcjami, czyli

$$P(x) = U(x) - TC(x), \text{ gdzie } x \text{ oznacza wielkość produkcji.} \tag{7}$$

Definicja 3 *Taką wielkość produkcji* x_o*, dla której zysk osiąga wartość największą nazwiemy optimum produkcyjnym.*

Wyznaczymy optimum produkcjne dla danego procesu produkcyjnego, gdzie utarg i koszt całkowity dany jest funkcjami U i TC. Z definicji 3 wynika, że x_o musi spełniać warunek

$$P'(x_o) = 0, \ P''(x_o) < 0, \tag{8}$$

czyli *utarg krańcowy* dany przez $U'(x_o)$ musi być równy *kosztowi krańcowemu* $MC(x_o)$. Jeśli dodatkowo cena produktu w analizowanym okresie działalności przedsiębiorstwa jest stała i wynosi c, to $U'(x_o) = c$ i dlatego optimum produkcyjne możemy wyznaczyć z warunku

$$MC(x_o) = c, \text{ o ile } P''(x_o) < 0. \tag{9}$$

Przykład 2 *Funkcja kosztów krańcowych dana jest następująco*

$$MC(x) = 0,2x^2 + 11.$$

Zakładając, że cena zbytu za jednostkę produkcji jest stała i wynosi $c = 15$ *zł wyznaczyć:*

1. *funkcję kosztów całkowitych* TC*, jeśli koszt całkowity wyprodukowania 10 sztuk wynosi 300 zł,*

[1]Dla potrzeb rozważań przedstawiona tutaj kategoria znacznie upraszcza obowiązujące np. w rachunkowości. Generalnie chodzi tutaj o zarobek przedsiębiorstwa jako efekt działalności produkcyjnej, która z jednej strony oznacza obrót produktem, a więc przychody z utargu, z drugiej strony nakład poniesiony na tę produkcję, czyli koszty całkowite. Przyjęta definicja jest więc saldem takiej transakcji.

2. *optimum produkcyjne tego procesu produkcji,*
3. *określić przedział, dla którego zysk jest dodatni (przedział ten nazywamy przedziałem opłacalności).*

Rozwiązanie. Szukamy takiej funkcji TC, że $TC'(x) = MC(x)$ dla $x \geqslant 0$, czyli

$$TC'(x) = 0,2x + 11.$$

Wykorzystując zasady rachunku różniczkowego, odwracając proces różniczkowania widzimy, że poszukiwana funkcja musi mieć postać

$$TC(x) = 0,1x^2 + 11x + C, \text{ gdzie } C \text{ jest stałą.}$$

Wartość tej stałej wyznaczymy z warunku, że $TC(10) = 300$, skąd $C = 180$, dlatego

$$TC(x) = 0,1x^2 + 11x + 180.$$

Ponieważ cena jest stała, utarg marginalny jest równy tej cenie, i na mocy (9) optimum produkcyjne wyznaczymy z warunku

$$TC'(x_o) = 15, \text{ czyli } 0,2x + 11 = 15,$$

skąd $x_o = 20$. Obliczymy teraz zysk dla tej wielkości produkcji. Ponieważ

$$P(x) = U(x) - TCx = 15 - (0,1x^2 + 11x + 180) = -0,1x^2 - 11x - 165, \ x \geqslant 0,$$

więc $P''(x) = -0,2$. Dlatego $x_o = 20$ jest optimum produkcyjnym. Ponadto przedział zysku ma postać [1, 220].

2 Lista problemów

1. Czy optimum technologiczne oznacza to samo co optimum produkcyjne? Odpowiedź uzasadnić metodamu ekonomii i matematyki.
2. Funkcja kosztów całkowitych w pewnej firmie ma postać

   $$TC(x) = 0,2x^2 + 7x + 60.$$

   Wiedząc, że cena zbytu jednostki produkcji jest na poziomie 15 zł, należy:

   (a) wyznaczyć przedział opłacalności produkcji;

   (b) znaleźć optimum produkcji;

   (c) obliczyć ten zysk.
3. Dana jest funkcja kosztów krańcowych $MC(x) = 0,3x^2 + 10$. Należy:

(a) wyznaczyć MC, jeśli wiadomo, że $TC(20) = 60$;

(b) dla jakiej wartości produkcji koszt jednostkowy będzie największy?

(c) wyznaczyć ten koszt.

4. Firma produkuje tylko jeden wyrób A. Funkcja kosztów całkowitych dla tej produkcji ma postać

$$TC(x) = \frac{1}{3}x^3 - 30x^2 + 1000x + 2000.$$

Wpływy ze sprzedaży mierzone są według zasady $U(x) = (1600 - 5x)x$. Wiadomo, że firma może produkować co najwyżej 80 jednostek produktu A. Ustalić, czy opłaca się firmie wykorzystać jej całą zdolność produkcyjną, jeśli dąży się do maksymalnego zysku całkowitego

5. Funkcja kosztów całkowitych wyroby X wyznaczona na podstawie danych miesięcznych ma postać

$$TC(x) = 4x + 200.$$

W maju firma wyprodukowała 2000 sztuk wyrobu X i sprzedała je po 10 zł za sztukę. Ile sztuk wyrobu X firma powinna wyprodukować w czerwcu, aby osiągnąć taki sam zysk jak w maju, jeśli cena za sztukę zostanie obniżona do 8 zł.