# Finanse i Rachunkowość<br>studia niestacjonarne

*Wprowadzenie do teorii ciągów liczbowych*

(treść wykładu z 21 grudnia 2014)

## 1 Definicja ciągu liczbowego

Spośród *funkcji rzeczywistych* $f\colon D_f \to \mathbf{R}$ ważną rolę odgrywają te, dla których dziedzina $D_f$ zawarta jest w zbiorze liczb naturalnych, czyli

$$D_f = \mathbf{N}_o \subset \mathbf{N}. \tag{1}$$

**Definicja 1** *Ciągiem liczbowym nazywamy każdą funkcję* $f\colon D_f \to \mathbf{R}$, *dla której spełniony jest warunek (1).*

Dalej będziemy zakładali, że $\mathbf{N}_o$ jest nieskończonym podzbiorem zbioru liczb naturalnych[1]. Ponadto dla uproszczenia rozważań przyjmiemy, że $\mathbf{N}_o = \mathbf{N}$.
Z historycznego punktu widzenia w literaturze przedmiotu obowiązuje specyficzny sposób oznaczania ciągów i dostosowane do tego sposobu nazewnictwo.

I tak, zamiast pisać $f(x)$, będziemy pisali $a_n$ i będziemy mówili, że mamy $n$–ty *wyraz ciągu*, natomiast *ciąg* ten będziemy oznaczali albo przez

$$(a_n)_{n\geqslant 1}, \tag{2}$$

albo

$$a_n,\ n \geqslant 1. \tag{3}$$

Wtedy postać $n$–tego wyrazu ciągu $(a_n)_{n\geqslant 1}$ będziemy nazywali jego *wzorem.* Wyjaśniają to dostatecznie podane niżej przykłady.

**Przykład 1** *Ciąg* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *dany jest wzorem* $a_n = (-1)^n$ *dla* $n \geqslant 1$. *Ponieważ dla kolejnych liczb parzystych ciąg ten przyjmuje wartość jeden, a dla nieparzystych* $-1$, *będziemy go dalej nazywali ciągiem naprzemiennym.*

**Przykład 2** *Niech* $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$, *dla* $n \geqslant 1$, *gdzie* $\alpha$ *jest daną liczbą rzeczywistą większą od zera. Wtedy ciąg* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *będziemy nazywali ciągiem* $\alpha-$*harmonicznym. Oczywiście takich ciągów jest nieskończenie wiele, np.*

$$\frac{1}{n},\ \ \frac{1}{n^2},\ \ \frac{1}{\sqrt{n}}\ \textit{dla}\ n \geqslant 1.$$

[1] Takie ciągi nazywamy też *ciągami nieskończonymi.*

**Przykład 3** *Niech teraz* $c_n = q^n, \ n \geqslant 1,$ *gdzie* $q$ *jest daną liczbą rzeczywistą. Wtedy tak zdefiniowany ciąg nazywamy ciągiem geometrycznym, natomiast liczbą* $q$*–jego ilorazem. W takim razie poniższe ciągi stanowią przyłady ciągów geometrycznych*[2]

$$2^n, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad dla\ n \geqslant 1.$$

**Przykład 4** *Przez ciąg Eulera będziemy rozumieli ciąg dany wzorem*

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ dla\ n \geqslant 1.$$

**Przykład 5** *Przypuśćmy, że dany jest ciąg* $(a_n)_{n\geqslant 1}$. *Definiujemy nowy ciąg, którego* $n$*–ty wyraz oznaczymy wyjątkowo dużą literą* $S_n$, *w sposób następujący*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ dla\ n \geqslant 2,$$

*gdzie z definicji przyjmiemy, że* $S_1 = a_1$. *Tak zdefiniowany ciąg* $(S_n)_{n\geqslant 1}$ *dalej będziemy nazywali szeregiem liczbowym, jego* $n$*–ty wyraz* $S_n$ *nazwiemy* $n$*–tą sumą częściową. Dlatego możemy np. mówić odpowiednio o:*

- *szeregach* $\alpha$*–harmonicznych, kiedy*

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}, \ gdzie\ \alpha > 0,$$

- *szeregach geometrycznych, wtedy*

$$S_n = q + q^2 + \ldots + q^n, \ gdzie\ q \in \mathbf{R}.$$

Zauważmy, że w przypadku szeregu geometrycznego danego powyżej możemy napisać

$$S_n = q\frac{1-q^n}{1-q}, \ \text{o ile } q \neq 1, \ \text{oraz } S_n = n, \ \text{w przeciwnym razie.}$$

Nie da się natomiast uzyskać podobnego efektu w przypadku szeregu $\alpha$–harmonicznego i wielu innych. Z tego powodu w matematyce szeregi liczbowe oznacza się inaczej, w miejsce dotychczasowego oznaczenia $(S_n)_{n\geqslant 1}$, przyjmuje się następujące $\sum a_n$, np.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}, \quad \sum q^n. \tag{4}$$

[2]Zauważmy, że ciąg naprzemienny jest przykładem ciągu geometrycznego.

# 2 Klasyfikacja–monotoniczność i ograniczoność ciągów

Z wielu powodów, o niektórych napiszemy dalej, warto sklasyfikować ciągi co najmniej według dwóch kryteriów. Zaczniemy od pojęcia *monotoniczności.* Z definicji przyjmiemy, że

**Definicja 2** *Ciąg* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *jest monotoniczny, jeśli definiująca go funkcja jest funkcją monotoniczną. Dlatego możemy mówić o czterech sytuacjach, kiedy ciąg jest albo:*

1. *rosnący, albo*
2. *malejący, albo*
3. *niemalejący, albo*
4. *nierosnący.*

Z definicji funkcji monotonicznej oraz z własności zbioru liczb naturalnych wynika np., że (proszę to uzasadnić)

**Fakt 1**

$$(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ jest rosnący } \Leftrightarrow a_n < a_{n+1} \text{ dla każdego } n \geqslant 1.$$

**Zadanie 1** *Sformułować, a następnie uzasadnić pozostałe przypadki pojawiające się w definicji ciągu monotonicznego.*

**Przykład 6** *Zbadamy monotoniczność ciągu* $a_n = \frac{n!}{2^n}$, $n \geqslant 1$. *W tym celu skorzystamy z faktu 1, który mówi, że należy porównać ze sobą tzw. sąsiednie wyrazy ciągu, czyli*

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \ \text{ z } \ a_n = \frac{n!}{2^n}, \text{ dla każdego } n.$$

*Ponieważ obie zdefiniowane powyżej liczby są dodatnie, oraz mają strukturę iloczynu, porównamy je ze sobą dzieląc je przez siebie, czyli*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!},$$

*co po skróceniu oznacza, że*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2}.$$

*W takim razie, jeśli tylko* $n > 1$, $a_{n+1} > a_n$, *co oznacza, że począwszy od* $n \geqslant 2$ *ciąg zachowuje się jak ciąg rosnący*[3].

[3]Dalej zobaczymy, że taki rodzaj monotoniczności jest ważny w tej teorii.

**Przykład 7** *Można uzasadnić, że ciąg Eulera jest rosnący.*

**Zadanie 2** *Zbadać monotoniczność ciągów*

$$\frac{1}{n^\alpha}\ (\alpha > 0), \quad \frac{1}{n^2 - n + 1}, \quad n \geqslant 1.$$

Zajmiemy się teraz drugą kategorią ciągów–*ciągami ograniczonymi*. Z definicji przyjmiemy, że

**Definicja 3** *Ciąg* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *jest ograniczony, jeśli definiująca go funkcja jest ograniczona. Oznacza to, że jeśli weźmiemy zbiór wartości ciągu* $\{a_n\colon\ n \geqslant 1\}$, *to*

$$\{a_n\colon\ n \geqslant 1\} \subset (a,\ b),\ \textit{dla pewnych rzeczywistych } a < b.$$

*W dalszym ciągu wygodniej jest rozważać osobno dwa następujące warunki:*

1. $$\{a_n\colon\ n \geqslant 1\} \subset (-\infty,\ b),\ \textit{dla pewnego rzeczywistego } b,$$

   *wtedy mówimy o tzw. ograniczoności z góry, oraz*

2. $$\{a_n\colon\ n \geqslant 1\} \subset (a,\ +\infty),\ \textit{dla pewnego rzeczywistego } a,$$

   *wtedy mówimy o tzw. ograniczoności z dołu.*

*W takim razie ograniczoność oznacza jednoczesną ograniczoność z dołu i z góry.*

**Przykład 8** *Można pokazać, że ciąg Eulera jest ograniczony, dokładniej zachodzi wtedy dla każdego* $n$ *warunek*

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

**Zadanie 3** *Zbadać ograniczoność następujących ciągów:*

$$\sin n, \quad 2^n, \quad n^2 - n + 1, \quad \ln n, \quad \sum \frac{1}{n}.$$

# 3 Zbieżność i rozbieżność ciągu

Zajmiemy się teraz najważniejszą kategorią ciągu–jego *zbieżnością*. Dla tego celu dobrze jest wprowadzić dodatkową strukturę ciągu, na którą składa się $n$ jego początkowych wyrazów, zwanych *głową* ciągu, oraz reszta–zwana jego *ogonem*. Jeśli mamy ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$, to

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ jest przykładem jego } \textit{głowy},$$

$$(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots) \text{ jest przykładem jego } \textit{ogona}.$$

Zbieżność ciągu jest własnością jego *ogona*. Dokładniej, opisuje jego *asymptotyczne stabilne* zachowanie się. Związane ono jest z pojęciem *bliskości*, które to pojęcie jest konsekwencją *odelgłości* na prostej rzeczywistej. Jak dobrze wiadomo ze szkoły odległość dwóch liczb $a$ i $b$ mierzy się za pomocą liczby zdefiniowanej następująco $|a-b|$.

Zaczniemy od pewnej pomocniczej definicji

**Definicja 4** *Niech $g \in \mathbf{R}$ oraz $\varepsilon > 0$. Przez $O(g,\varepsilon)$ oznaczymy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oddalonych od liczby $g$ o mniej aniżeli $\varepsilon$, czyli z definicji odległości oznacza to, że*

$$O(g,\varepsilon) = \{r \in \mathbf{R}\colon\ |r-g| < \varepsilon\} = (g-\varepsilon, g+\varepsilon).$$

*Dalej zbiór $O(g,\varepsilon)$ będziemy nazywali $\varepsilon$–otoczeniem liczby $g$.*

Możemy teraz zdefiniować pojęcie *zbieżności* ciągu.

**Definicja 5** *Powiemy, że ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny, jeśli istnieje taka liczba rzeczywista $g$, że w każdym jej $\varepsilon$–otoczeniu znajduje się ogon tego ciągu, co będziemy zapisywali symbolicznie następująco $a_n \longrightarrow g$.*

Z przyjętej definicji *zbieżności* ciągu wynika wprost, że:

**Wniosek 1**

1. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.
2. Ciąg zbieżny nie może mieć dwóch różnych granic.

Jednocześnie należy zwrócić uwaga na:

**Uwaga 1**

1. Na zbieżność ciągu nie ma wpływu zachowanie się *głowy* ciągu.
2. Ciąg ograniczony nie musi być zbieżny (dlaczego?).

**Przykład 9** *Sprawdzić, że* $\frac{n-1}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}$. *Zbadamy odległość pomiędzy* $n$*–tym wyrazem ciągu, a liczbą* $\frac{1}{2}$. *Dokładniej, sprawdzimy, dla jakich wyrazów odległość ta jest mniejsza od z góry zadanej liczby* $\varepsilon > 0$. *W tym celu warunek*

$$\left|\frac{n-1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

*potraktujemy jako nierówność z niewiadomą* $n$ *i rozwiążemy ją. Z matematyki szkolelnej wiadomo (dlaczego?), że wtedy*

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right),$$

*co oznacza, że (dlaczego?) w* $\varepsilon$*–otoczeniu liczby* $\frac{1}{2}$ *znajduje się pewien ogon badanego ciągu. Ponieważ w przyjętej analizie liczba* $\varepsilon > 0$ *była dowolna, dowodzi to, że badany ciąg jest zbieżny i jego granicą jest liczba* $\frac{1}{2}$.

Wróćmy na chwilę do szczególnych ciągów, czyli szeregów. Jeśli ciąg $(S_n)_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny, to jego granicę oznaczamy przez $S$ i nazywiemy *sumą* tego szeregu. Wtedy będziemy też pisali

$$S_n \longrightarrow S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n. \tag{5}$$

**Przykład 10** *Można pokazać, że ciąg Eulera jako rosnący i ograniczony jest zbieżny. Wtedy jego granicę oznaczamy literą* $e$ *i nazywamy liczbą Eulera. Wiadomo, że liczba ta jest niewymierna, ponadto* $e \simeq 2,71$.

**Zadanie 4** *uzasadnić, że:*

*1.*

$$\frac{1}{n^\alpha} \longrightarrow 0 \text{ dla każdego } \alpha > 0.$$

*2.*

$$q^n \longrightarrow 0 \text{ dla każdego } |q| < 1.$$

*Wyprowadzić stąd poniższą równość*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, \text{ o ile } |q| < 1.$$

Na koniec tej części wykładu zajmiemy się pewnym specyficznym przypadkiem zbieżności, którą nazywamy *rozbieżnością*. W tym celu zdefiniujemy nowy rodzaj otoczenia–będą to tzw. półproste rzeczywiste, czyli przedziały $(-\infty, a)$ oraz $(b, +\infty)$. Pierwszy z nich nazwiemy wtedy *otoczenim* $-\infty$, drugi odpowiednio *otoczeniem* $+\infty$.

Przyjmiemy teraz następującą definicję

**Definicja 6** *Powiemy, że ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ jest rozbieżny do $+\infty$ (odpowiednio do $-\infty$), jeśli w każdym otoczeniu $+\infty$ (odpowiednio $-\infty$) znajduje się jego pewien ogon, co będziemy zapisywali odpowiednio*

$$a_n \longrightarrow +\infty \ (-\infty).$$

**Uwaga 2**

Istniej alternatywne nazewnictwo odnoszące się do pojęcia rozbieżności: przypadek $a_n \longrightarrow +\infty(-\infty)$ nazywamy *zbieżnością niewłaściwą*. Wtedy symbol $\infty$ nazywamy też *granicą niewłaściwą*.

Wprost z definicji rozbieżności wynika (dlaczego?), że

**Fakt 2** *Każdy ciąg rozbieżny jest nieograniczony.*

Należy jednak pamiętać, że istnieją ciągi, które pomimo, że nie są ograniczone, to nie są rozbieżne[4].

Na zkończenie zadanie

**Zadanie 5** *Uzasadnić rozbieżność następujących ciągów*

$$2^n, \quad n^2 - n + 2, \quad \sum \frac{1}{n}.$$

[4]Zbadać ciąg $(-1)^n n,\ n \geqslant 1$.