2.2 Zadania

Zadanie 2.2.1 *Podać elementy następujących zbiorów*

1. $\{x \in \mathbf{N} : \ |3 - x| < 3\}$,
2. $\{\{a\}, \{a, b\}, \{b\}, b\}$,
3. $\{x \in \mathbf{R} : \ x^2 + 1 \geq 0\}$.

Zadanie 2.2.2 *Zbadać, czy zachodzi inkluzja $A \subset B$ lub $B \subset A$, jeśli:*

1. $A = \{x \in \mathbf{N} : \ x > 2\}, \quad B = \{y \in \mathbf{N} : \ y > 2\}$,
2. $A = \{ax + b : a, b \in \mathbf{R}\}, \quad B = \{x + y : y \in \mathbf{R}\}$,
3. $A = \emptyset, \quad B = \{a, b, c\}$.

Zadanie 2.2.3 *Wyznaczyć zbiory $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$, jeśli:*

1. $A = \{a, b, c\}, \quad B = \{c, d\}$,
2. $A = \{\{a, b\}, c\}, \quad B = \{c, d\}$,
3. $A = \{x \in \mathbf{N} : \ x < 3\}, \quad B = \{x \in \mathbf{N} : \ x \geq 3\}$,
4. $A = \{x \in \mathbf{R} : \ x < 1\}, \quad B = \{x \in \mathbf{R} : \ x < 2\}$.

Zadanie 2.2.4 *Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość $(A \setminus B) \setminus C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$.*

Zadanie 2.2.5 *Sprawdzić, czy zachodzi równość $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.*

Zadanie 2.2.6 *Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi implikacja $(A \subset B) \Rightarrow [(C \setminus B) \subset (C \setminus A)]$.*

Zadanie 2.2.7 *Uzasadnić, że $A \cap B$ jest największym zbiorem zawartym jednocześnie w A i B, a więc takim, że jeśli $C \subset A$ i $C \subset B$, to $C \subset (A \cap B)$.*

Zadanie 2.2.8 *Jaki jest związek między zbiorami A i B, jeśli $A \subset (A \cap B) \setminus B$?*

Zadanie 2.2.9 *Znaleźć $A \times B$, jeśli $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.*

Zadanie 2.2.10 *Udowodnić podane wcześniej własności różnicy symetrycznej.*

Zadanie 2.2.11 *Znaleźć iloczyn kartezjański $A \times B$ i $B \times A$, jeśli*

1. $A = \{0, 1\}, \quad B = \{1, 2\}$

2. $A = \emptyset, \quad B = \{1, 2, 3\}$

Zadanie 2.2.12 *Sprawdzić, czy prawdziwe są równości*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$

Zadanie 2.2.13 *Uzasadnić, że jeśli $A \times B = B \times A$, to albo $A = \emptyset$, albo $A = B$, albo $B = \emptyset$.*

Zadanie 2.2.14 *Stosując ZIM, wykazać, że*

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Zadanie 2.2.15 *Stosując ZIM, wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwa jest równość*

$$1 + 2 + 5 + ... + (2n-1)^2 = n^2.$$

Zadanie 2.2.16 *Stosując ZIM, wykazać, że*

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

Zadanie 2.2.17 *Stosując ZIM, wykazać, że liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9.*

Zadanie 2.2.18 *Stosując ZIM, wykazać, że liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5.*

Zadanie 2.2.19 *Stosując ZIM, wykazać, że zachodzi nierówność $3^{n+2} > 4n + 7$ dla $n > 2$.*

Zadanie 2.2.20 *Pokazać reprezentację ułamka $\frac{3}{19}$ za pomocą ułamka łańcuchowego.*

Zadanie 2.2.21 *Podać reprezentację podanych liczb wymiernych w postaci ułamka dziesiętnego:*

1. $q = \frac{3}{32}$
2. $p = \frac{12}{13}$

Zadanie 2.2.22 *Wyznaczyć rodzinę zbiorów $\mathcal{P}(X)$, jeśli*

1. $X = \{a, b, c\}$

2. $X = \emptyset$

3. $X = \{\emptyset\}$.

Zadanie 2.2.23 *Wyznaczyć* $\bigcup_{t\in\mathbf{N}} A_t$ *oraz* $\bigcap_{t\in\mathbf{N}} A_t$ *indeksowanej rodziny zbiorów*

$$A_t = \{x \in \mathbf{R}:\ -\frac{1}{t+1} < x < 1 - \frac{1}{t+1}\}, t \in \mathbf{N}.$$

Zadanie 2.2.24 *Niech* $\mathcal{A} = \{A_t, t \in T\}$ *będzie indeksowaną rodziną zbiorów, gdzie*

$$A_t = \{x \in \mathbf{R}:\ sinx = t\},\quad t \in \mathbf{R}$$

$$A_t = \{x \in \mathbf{R}:\ 0 \le x \le \frac{1}{t}\},\quad t > 0$$

$$A_t = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}:\ x^2 + y^2 \le t^2\},\quad t \ge 0.$$

Znaleźć $\bigcup_{t\in\mathbf{N}} A_t$ *oraz* $\bigcap_{t\in\mathbf{N}} A_t$.

Zadanie 2.2.25 *Podać przykłady rodzin zbiorów, które mają własność ideału oraz filtru.*