Rozdział 3

Relacje

3.1 Wprowadzenie teoretyczne i przykłady

Definicja 3.1.1 *Niech $A, B \subset X$ będą niepustymi zbiorami. Każdy podzbiór $\mathcal{R}$ produktu $A \times B$ będziemy nazywali relacją dwuargumentową pomiędzy pewnymi elementami zbioru A i pewnymi elementami zbioru B.*

$\square$

Uwaga 3.1.1 *Jeśli $(a, b) \in \mathcal{R}$, to będziemy pisali $a\mathcal{R}b$. Zatem*

$$\forall_{(a,b)\in A\times B} \quad a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a, b) \in \mathcal{R}.$$

$\square$

Zadanie 3.1.1 *W zbiorze $\mathbf{N}_+$ określona jest relacja dwuargumentowa $\mathcal{R}$ wzorem $m + n = 7$. Zapisać tę relację jako zbiór par uporządkowanych.*

Rozwiązanie

Ponieważ $\mathcal{R} = \{(m, n)\colon\ m, n \in \mathbf{N}_+\}$ *i* $m + n = 7$, więc $m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ponadto $m + n = 7$ implikuje, że $\mathcal{R} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$.

$\square$

Wśród relacji dwuargumentowych $\mathcal{R} \subset A\times B$ kluczową rolę odgrywają funkcje (odwzorowania).

Definicja 3.1.2 *Relację $\mathcal{R} \subset A \times B$ nazywamy funkcją określoną na zbiorze A i o wartościach w zbiorze B, co możemy zapisać $\mathcal{R} : A \to B$ lub $A \xrightarrow{\mathcal{R}} B$, jeśli*

$$\forall_{a\in A} \quad \exists!_{b\in B} \quad a\mathcal{R}b.$$

$\square$

Zadanie 3.1.2 *Niech* $A = \{a, b, c, d\}$*,* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *oraz* $\mathcal{R} = \{(a, 1), (b, 2), (b, 5), (c, 4), (d, 3)\}$*. Czy relacja* $\mathcal{R}$ *jest funkcją?*

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją funkcji musi być spełniony warunek

$$\forall_{a\in A} \ \exists!_{b\in B} \ a\mathcal{R}b.$$

Ponieważ $b\mathcal{R}2$ oraz $b\mathcal{R}5$, zatem nie istnieje dokładnie jeden element w zbiorze B, który jest w relacji z $b \in A$, co oznacza, że relacja $\mathcal{R}$ nie jest funkcją.

$\square$

Mając relację $\mathcal{R} \subset A \times B$, możemy zdefiniować relację $\mathcal{R}^{\leftarrow} \subset B \times A$.

Definicja 3.1.3 *Relację* $\mathcal{R}^{\leftarrow}$ *nazywamy relacją przeciwną (odwrotną) do relacji* $\mathcal{R}$*, gdy*

$$\forall_{a\in A, b\in B} \ b\mathcal{R}^{\leftarrow}a \Leftrightarrow a\mathcal{R}b$$

$\square$

Zadanie 3.1.3 *Niech* A, B *i* $\mathcal{R}$ *będą dane jak w zadaniu 3.1.2. Określić relację odwrotną* $\mathcal{R}^{\leftarrow}$*. Czy ta relacja jest funkcją?*

Rozwiązanie

Wykorzystując definicję relacji odwrotnej, mamy

$$\mathcal{R}^{\leftarrow} = \{(1, a), (2, b), (3, d), (4, d), (5, b)\}.$$

W takim razie relacja ta jest funkcją.

$\square$

Jednym z działań na relacjach jest superpozycja, czyli ich złożenie.

Definicja 3.1.4 *Będziemy mówili, że* $\mathcal{R}$ *jest złożeniem relacji* $\mathcal{R}_1 \subset A_1 \times B_1$ *i* $\mathcal{R}_2 \subset A_2 \times B_2$ *(co zapisujemy* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$*), jeśli*

$$\forall_{(a,b)\in A_1\times B_2} \ a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists_{b_1\in B_1} \ a\mathcal{R}_1b_1 \wedge b_1\mathcal{R}_2b$$

.

□

Zadanie 3.1.4 *Na zbiorze* $A = \{1,2,3,4\}$ *dana jest relacja* $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(3,4),(2,3)\}$. *Wyznaczyć relację* $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

Rozwiązanie

Mamy kolejno:

$$\begin{array}{c} 1\mathcal{R}1 \text{ oraz } 1\mathcal{R}2, \text{ więc } 1\mathcal{R}_1 2, \\ 1\mathcal{R}1 \text{ oraz } 1\mathcal{R}1, \text{ więc } 1\mathcal{R}_1 1, \\ 1\mathcal{R}2 \text{ oraz } 2\mathcal{R}3, \text{ więc } 1\mathcal{R}_1 3, \\ 2\mathcal{R}3 \text{ oraz } 3\mathcal{R}4, \text{ więc } 2\mathcal{R}_1 4, \end{array}$$

stąd $\mathcal{R}_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$.

□

Kolejnymi przykładami działań mnogościowych na relacjach są suma, różnica, iloczyn i produkt.

Definicja 3.1.5 *(suma relacji)*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \subset (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$$

$$\forall_{a \in A_1 \cup A_2, b \in B_1 \cup B_2} \quad a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a\mathcal{R}_1 b \vee a\mathcal{R}_2 b.$$

□

Definicja 3.1.6 *(różnica relacji)*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2 \subset (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$$

$$\forall_{a \in A_1 \setminus A_2, b \in B_1 \setminus B_2} \quad a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a\mathcal{R}_1 b \wedge \neg(a\mathcal{R}_2 b).$$

□

Definicja 3.1.7 *(iloczyn relacji)*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \subset (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$$

$$\forall_{a \in A_1 \cap A_2, b \in B_1 \cap B_2} \quad a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a\mathcal{R}_1 b \wedge a\mathcal{R}_2 b.$$

□

Definicja 3.1.8 *(produkt relacji)*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \subset (A_1 \times B_1) \times (A_2 \times B_2)$$

$$\forall_{a_j \in A_j, b_j \in B_j} \quad (a_1, b_1)\mathcal{R}(a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1\mathcal{R}_1 b_1 \wedge a_2\mathcal{R}_2 b_2.$$

□

W matematyce szerokie zastosowanie mają trzy typy relacji: równoważności, częściowego porządku i porządku.

Określimy najpierw cztery pomocnicze własności relacji $\mathcal{R} \subset A \times A$.

Powiemy, że relacja $\mathcal{R}$ jest

1. *zwrotna* (RZ), jeśli
$$\forall_{a \in A} \quad (a, a) \in \mathcal{R}.$$

2. *symetryczna* (RS), jeśli
$$\forall_{(a,b) \in A \times A} \quad a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a.$$

3. *antysymetryczna* (RA), jeśli
$$\forall_{(a,b) \in A \times A} \quad a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b.$$

4. *przechodnia* (RP), jeśli
$$\forall_{a,b,c \in A} \quad a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c.$$

Zadanie 3.1.5 *Rozstrzygnąć, które z powyższych własności w zbiorze* $S = \{0, 1, 2, 3\}$ *spełnia relacja* $\mathcal{R}$ *określona następująco*

$$\forall_{x,y \in S} \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y = 3.$$

Rozwiązanie

Z definicji relacji $\mathcal{R}$ wynika, że

$$\mathcal{R} = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}.$$

Ponieważ $(0, 0) \notin \mathcal{R}, (1, 1) \notin \mathcal{R}, (2, 2) \notin \mathcal{R}$ oraz $(3, 3) \notin \mathcal{R}$, więc $\mathcal{R}$ nie jest zwrotna.

Mamy, że $\forall_{(x,y)\in S\times S}\ \ (x,y)\in\mathcal{R}\Rightarrow(y,x)\in\mathcal{R}$, bo $(0,3)\in\mathcal{R}\Rightarrow(3,0)\in\mathcal{R}$ oraz $(1,2)\in\mathcal{R}\Rightarrow(2,1)\in\mathcal{R}$, $(3,0)\in\mathcal{R}\Rightarrow(0,3)\in\mathcal{R}$ oraz $(2,1)\in\mathcal{R}\Rightarrow(1,2)\in\mathcal{R}$, co dowodzi, że $\mathcal{R}$ jest symetryczna.

Ponieważ $(0,3)\in\mathcal{R}\ i\ (3,0)\in\mathcal{R}$, ale $0\neq 3$, więc $\mathcal{R}$ nie jest relacją antysymetryczną.
Podobnie można wykazać, że $\mathcal{R}$ nie jest relacją przechodnią, bowiem $(0,3)\in\mathcal{R}\ i\ (3,0)\in\mathcal{R}$, ale $(0,0)\notin\mathcal{R}$.

□

Zadanie 3.1.6 *Sprawdzić, czy iloczyn dwóch relacji przechodnich jest relacją przechodnią.*

Rozwiązanie

Zakładamy, że $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ są relacjami przechodnimi. Niech $(x,y)\in\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2$ oraz $(y,z)\in\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2$. Wówczas $(x,y)\in\mathcal{R}_1$ i $(x,y)\in\mathcal{R}_2$ oraz $(y,z)\in\mathcal{R}_1$ i $(y,z)\in\mathcal{R}_2$.

Z powyższego mamy $(x,y)\in\mathcal{R}_1\ i\ (y,z)\in\mathcal{R}_1$ oraz $(x,y)\in\mathcal{R}_2\ i\ (y,z)\in\mathcal{R}_2$. Z własności przechodniości relacji $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ otrzymamy, że $(x,z)\in\mathcal{R}_1\ i\ (x,z)\in\mathcal{R}_2$, więc $(x,z)\in\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2$.

Wykazaliśmy zatem, że iloczyn dwóch relacji przechodnich jest relacją przechodnią.

□

Zadanie 3.1.7 *Sprawdzić, czy relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze $X=\{1,3,6\}$ jest zwrotna, symetryczna, antysymetryczna, przechodnia, jeśli*

$$\mathcal{R}=\{(1,1),(1,3),(1,6),(3,6),(6,3),(6,6)\}.$$

Rozwiązanie

Relacja $\mathcal{R}$ nie może być zwrotna, bowiem $(3,3)\notin\mathcal{R}$. Nie jest ona również symetryczna, gdyż $(1,3)\in\mathcal{R}$, ale $(3,1)\notin\mathcal{R}$. Ponieważ $(3,6)\in\mathcal{R}$ oraz $(6,3)\in\mathcal{R}$, więc nie może być ona relacją antysymetryczną.

Nie spełnia ona również warunku na to, aby być relacją przechodnią, bowiem $(3,6)\in\mathcal{R}$ i $(6,3)\in\mathcal{R}$, ale $(3,3)\notin\mathcal{R}$.

Relacja $\mathcal{R}$ nie jest zatem zwrotna, symetryczna, antysymetryczna oraz przechodnia.

□

Istnieją inne sposoby przedstawiania relacji. Pokażemy kolejne dwa sposoby oparte na pojęciach *grafu skierowanego* i *macierzy sąsiedztwa*.

Niech $\mathcal{R}$ będzie dwuargumentową relacją określoną w skończonym zbiorze $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Dla każdego j mamy więc co najmniej jedną uporządkowaną parę punktów (a_j, a_{n_j}), które nazwiemy *wierzchołkami*. Dla każdej takiej pary, a_j nazwiemy *wierzchołkiem początkowym*, natomiast a_{n_j} *wierzchołkiem końcowym*. Ponadto będziemy mówili, że wierzchołki te stanowią początek i koniec krawędzi $k(a_j, a_{n_j})$.

Definicja 3.1.9 *Skończonym grafem skierowanym odpowiadającym relacji $\mathcal{R}$ (oznaczamy $G_{\mathcal{R}}$) nazywamy obiekt, w którym:*

1. *dany jest zbiór W jego wierzchołków;*
2. *dany jest zbiór K jego krawędzi;*
3. *określona jest funkcja $g : K \to W \times W$, gdzie*
$$g(k(a_j, a_{n_j})) = (a_j, a_{n_j})$$
dla $j = 1, 2, ..., n$.

□

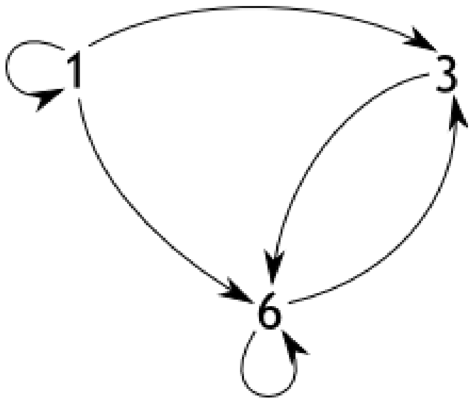
Zadanie 3.1.8 *Niech $\mathcal{R}$ będzie relacją określoną jak w zad. 3.1.7. Narysować graf tej relacji.*

Rozwiązanie

Zbiorem wierzchołków W jest zbiór $X = \{1, 3, 6\}$. Kolejne krawędzie grafu powstaną w wyniku połączenia tych wierzchołków i, j, które są w relacji $\mathcal{R}$. $1\mathcal{R}6$ oznacza, że wierzchołek 1 zostanie połączony krawędzią $k(1, 6)$ z wierzchołkiem 6. Dla zaznaczenia początku i końca krawędzi użyjemy odcinka (lub łuku krzywej) zakończonego grotem. Ponieważ $1\mathcal{R}1$, więc dla zaznaczenia tego faktu użyjemy pętli. Dlatego graf naszej relacji będzie się składał z 2 pętli oraz 4 krawędzi. Rysunek 3.1 przedstawia graf relacji $\mathcal{R}$.

□

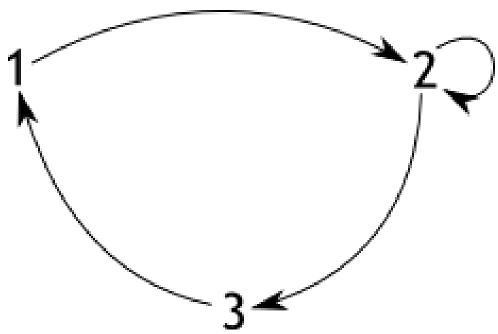
Zadanie 3.1.9 *Dane są dwie relacje $\mathcal{R}_1 = \{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ określona na $A_1 = \{1, 2, 3\}$ oraz $\mathcal{R}_2 = \{(3,3), (3,5), (4,5), (5,5)\}$ określona na zbiorze $A_2 = \{3, 4, 5\}$. Narysować grafy reprezentujące te relacje oraz graf odpowiadający sumie tych relacji.*



Rysunek 3.1: Rysunek grafu relacji $\mathcal{R}$

Rozwiązanie

Oznaczmy grafy reprezentujące relacje $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ odpowiednio $G_{\mathcal{R}_1}$ oraz $G_{\mathcal{R}_2}$. Ich wykresy przedstawiają rysunki 3.2 i 3.3.

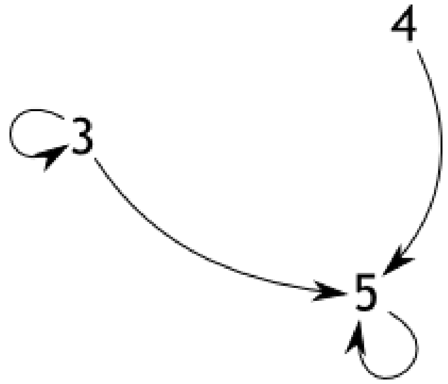


Rysunek 3.2: Rysunek grafu $G_{\mathcal{R}_1}$

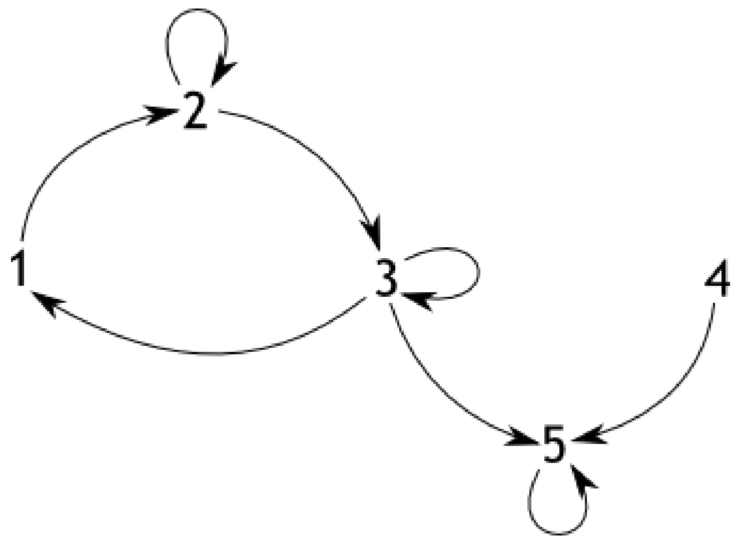
Graf relacji $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ $(G_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2})$ powstanie przez "połączenie" wykresów grafów $G_{\mathcal{R}_1}$ i $G_{\mathcal{R}_2}$.

$\square$

Sposobem analitycznego kodowania grafów (czyli nowy sposób reprezentowania relacji) jest macierz. Macierz relacji $\mathcal{R}$ oznaczamy przez $\mathbb{A}_{\mathcal{R}}$ i nazywamy ją również *macierzą sąsiedztwa*.



Rysunek 3.3: Rysunek grafu $G_{\mathcal{R}_2}$



Rysunek 3.4: Rysunek grafu $G_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}$

Fakt 3.1.1 *Dla każdej dwuargumentowej relacji $\mathcal{R}$ określonej na skończonym zbiorze n-elementowym A istnieje reprezentująca ją macierz $\mathbb{A}_{\mathcal{R}}$.*

Jeśli przez $a_1, a_2, ..., a_n$ oznaczymy elementy zbioru A, to

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & gdy \quad a_i \mathcal{R} a_j \\ 0 & gdy \quad \neg(a_i \mathcal{R} a_j). \end{cases}$$

Na odwrót dla każdej macierzy zero-jedynkowej $\mathbb{A} = [a_{ij}]$ stopnia n istnieje relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, taka że $a_i \mathcal{R} a_j \Leftrightarrow a_{ij} = 1$.

□

Zadanie 3.1.10 *Dana jest relacja $\mathcal{R}_1$ jak w zadaniu 3.1.9. Podać jej macierz sąsiedztwa.*

Rozwiązanie

W zbiorze $A_1 = \{1, 2, 3\}$ ustalamy kolejność od najmniejszej wartości do największej. Macierz $\mathbb{A}_{\mathcal{R}}$ będzie stopnia 3, bo $|A_1| = 3$. Będzie ona składała się z 4 niezerowych elementów, bo graf tej relacji miał 4 krawędzie z uwzględnieniem pętli.

Macierz $\mathbb{A}_{\mathcal{R}}$ ma postać

$$\mathbb{A}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zwracamy uwagę na fakt, że o postaci macierzy sąsiedztwa decyduje sposób uporządkowania zbioru, na którym określona jest relacja.

□

Zadanie 3.1.11 *Podać macierz reprezentującą relacji $\mathcal{R}_1^{\leftarrow}$. Jaka jest zależność pomiędzy macierzami $\mathbb{A}_{\mathcal{R}}$ oraz $\mathbb{A}_{\mathcal{R}^{\leftarrow}}$?*

Rozwiązanie

Z definicji relacji odwrotnej wynika, że $\mathcal{R}_1^{\leftarrow} = \{(2, 1), (2, 2), (3, 2), (1, 3)\}$. Macierz reprezentująca tę relację przy uporządkowaniu zbioru $1, 2, 3$ jest postaci

$$\mathbb{A}_{\mathcal{R}^{\leftarrow}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno zauważyć, że $\mathbb{A}_{\mathcal{R}^{\leftarrow}} = \mathbb{A}_{\mathcal{R}}^T$.

□

Zadanie 3.1.12 *Dana jest macierz*

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opisać relację $\mathcal{R}$, taką aby $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathcal{R}}$. Czy ta relacja jest przechodnia?

Rozwiązanie

Relacja $\mathcal{R}$ będzie określona na zbiorze $A = \{1, 2, 3, 4\}$ uporządkowanym rosnąco. Macierz $\mathbb{A}$ posiada 6 jedynek, więc relacja $\mathcal{R}$ składa się z 6 par elementów. Zatem $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$. Ponieważ $(1, 3) \in \mathcal{R}$ oraz $(3, 4) \in \mathcal{R}$, ale $(1, 4) \notin \mathcal{R}$, relacja $\mathcal{R}$ nie jest przechodnia.

□

Zadanie 3.1.13 *O relacjach $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ wiadomo, że ich macierze sąsiedztwa mają postać:*

$$\mathbb{A}_{\mathcal{R}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{A}_{\mathcal{R}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Narysować grafy oraz wyznaczyć macierze sąsiedztwa relacji $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.

Rozwiązanie

Z postaci macierzy sąsiedztwa wynika, że

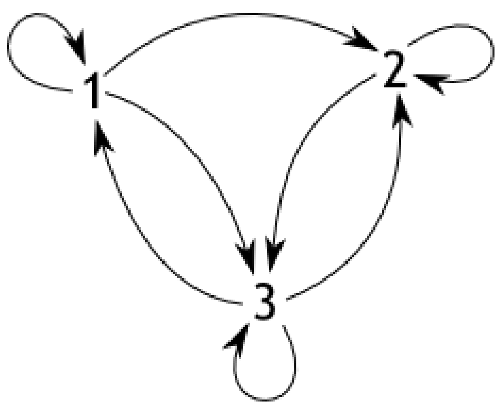
$$\mathcal{R}_1 = \{(1,2),(2,2),(3,2),(3,3)\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1),(1,3),(2,3),(3,1)\}.$$

Wykorzystując definicję sumy relacji otrzymamy:

$$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

Graf tej relacji ma wtedy postać jak na rys. 3.5.



Rysunek 3.5: Rysunek grafu $G_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}$

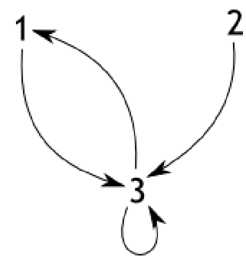
Natomiast macierz sąsiedztwa ma postać:

$$\mathbb{A}_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Weźmy teraz złożenie relacji $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$, czyli

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \{(1,3),(2,3),(3,1),(3,3)\}.$$

Graf tej relacji wygląda jak na rys. 3.6.



Rysunek 3.6: Rysunek grafu $G_{\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1}$

Macierz sąsiedztwa tej relacji jest postaci:

$$\mathbb{A}_{\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Definicja 3.1.10 *Każdą relację $\mathcal{R}$ na zbiorze A, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, będziemy nazywali relacją równoważności.*

□

Zadanie 3.1.14 *Dany jest zbiór $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ oraz określona na nim relacja $\mathcal{R}$*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y.$$

Sprawdzić, czy jest to relacja równoważności.

Rozwiązanie

Musimy sprawdzić, czy jest to relacja typu: RZ, RS, RP. $\mathcal{R}$ będzie zwrotna, gdy $\forall_{x \in A} \;\; x\mathcal{R}x$. Ponieważ $\forall_{n \in \mathbf{N}_+} \;\; n|n$, zatem tym bardziej zachodzi powyższy warunek, czyli $\mathcal{R}$ jest zwrotna. $\mathcal{R}$ będzie symetryczna, gdy $\forall_{x,y \in A} \;\; x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. Wystarczy zauważyć, że $2|4$, ale $\neg(4|2)$. Powyższy przykład świadczy o tym, że $\mathcal{R}$ nie jest symetryczna, dlatego nie może być relacją równoważności.

□

Zadanie 3.1.15 *Zbadać, czy relacja określona następująco*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2|(x-y), \quad x,y \in \mathbf{Z}$$

jest relacją równoważności.

Rozwiązanie

Relacja ta jest zwrotna, bowiem

$$\forall_{x\in\mathbf{Z}} \;\; 2|(x-x) \;\; (x-x=0=0\cdot 2).$$

Ponieważ $(x-y)=(-(y-x))=(-1)\cdot(y-x)$, więc

$$\forall_{x,y\in\mathbf{Z}} \;\; 2|(x-y) \Rightarrow 2|(y-x),$$

co dowodzi, że ta relacja jest symetryczna. Z faktu, że $2|(x-y)$, mamy, że $x-y=2t_1,\; t_1\in\mathbf{Z}$ oraz z tego, że $2|(y-z)$, mamy $y-z=2t_2,\; t_2\in\mathbf{Z}$. Dlatego $x-z=x-y+y-z=2t_1+2t_2=2(t_1+t_2)$, czyli $2|(x-z)$.
Wykazaliśmy zatem, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności.

$\square$

Mając relację równoważności $\mathcal{R}$ na zbiorze A, każdemu elementowi $a\in A$ możemy przyporządkować zbiór

$$[a]_{\mathcal{R}}=\{b\in A: a\mathcal{R}b\},$$

który będziemy nazywali *klasą abstrakcji* elementu a relacji $\mathcal{R}$.

Twierdzenie 3.1.1 *(zasada abstrakcji) Dla każdej relacji równoważności $\mathcal{R}$ na zbiorze A istnieje partycja tego zbioru, której jedynymi elementami są wszystkie klasy abstrakcji. Na odwrót, dla danej partycji $\mathcal{A}=\{A_t\colon\ t\in T\}$ zbioru A istnieje relacja równoważności $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ na zbiorze A taka, że*

$$\forall_{a,b\in A} a\mathcal{R}_{\mathcal{A}}b \Leftrightarrow \exists_{t\in T} a,b\in A_t.$$

$\square$

Zadanie 3.1.16 *Wyznaczyć klasy abstrakcji relacji z zadania poprzedniego.*

Rozwiązanie

Zgodnie z *zasadą abstrakcji* należy wyznaczyć podzbiory zbioru $\mathbf{Z}$ parami rozłącznie, tak aby wszystkie elementy każdego podzbioru były ze sobą w relacji. Ponadto podzbiory te muszą sumować się do $\mathbf{Z}$. Wiadomo, że (dlaczego?) różnica dwóch liczb parzystych jest zawsze parzysta oraz różnica dwóch liczb nieparzystych również jest liczbą parzystą. Z powyższego wynika, że relacja $\mathcal{R}$ określona wzorem $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2|(x-y)$ wyznacza nam dwie następujące klasy abstrakcji

$$[0]_{\mathcal{R}} = \{2k : k \in \mathbf{Z}\}$$

oraz

$$[1]_{\mathcal{R}} = \{2k+1 : k \in \mathbf{Z}\}.$$

Ponieważ dają one partycję zbioru $\mathbf{Z}$, stanowią rozwiązanie zadania.

□

Definicja 3.1.11 *Każdą relację $\mathcal{R}$ określoną na zbiorze A o własnościach: relacja jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia będziemy nazywać częściowym porządkiem, a zbiór A z tą relacją zbiorem częściowo uporządkowanym.*

□

Zadanie 3.1.17 *Sprawdzić, czy relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze $A = \{1,2,3,4\}$ jest częściowym porządkiem, jeśli*

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(2,3),(3,4),(1,4)\}.$$

Rozwiązanie

Należy sprawdzić, czy $\forall_{x\in A}\ \ x\mathcal{R}x$. Ponieważ $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in \mathcal{R}$, więc $\mathcal{R}$ jest relacją zwrotną. Mamy ponadto $1\mathcal{R}3 \wedge \neg(3\mathcal{R}1)$, $2\mathcal{R}3 \wedge \neg(3\mathcal{R}2)$, $3\mathcal{R}4 \wedge \neg(4\mathcal{R}3)$ oraz $1\mathcal{R}4 \wedge \neg(4\mathcal{R}1)$, co pokazuje, że (dlaczego?) $\mathcal{R}$ jest relacją antysymetryczną. Natomiast relacja ta nie jest przechodnia, gdyż $2\mathcal{R}3 \wedge 3\mathcal{R}4)$, ale $\neg 2\mathcal{R}4$. $\mathcal{R}$ nie jest więc relacją częściowego porządku na zbiorze A.

□

Zadanie 3.1.18 *Sprawdzić, czy relacja*

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}$$

określona na zbiorze $A = \{1,2,3,4\}$ jest częściowym porządkiem.

Rozwiązanie

Ponieważ $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in \mathcal{R}$, więc $\mathcal{R}$ jest relacją zwrotną. Z definicji $\mathcal{R}$ wynika, że dla $x \neq y$, jeśli $x\mathcal{R}y$, to $\neg(y\mathcal{R}x)$. Zatem tylko dla $x = y$ mamy, że $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$, co dowodzi, że $\mathcal{R}$ jest antysymetryczna.

Ponadto

$$\forall_{x,y,z\in A} \quad x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z,$$

bowiem na przykład

$$(1,2) \in \mathcal{R} \wedge (2,4) \in \mathcal{R} \wedge (1,4) \in \mathcal{R},$$
$$(1,3) \in \mathcal{R} \wedge (3,4) \in \mathcal{R} \wedge (1,4) \in \mathcal{R}, \ \textit{itd.}$$

Zatem $\mathcal{R}$ jest relacją częściowego porządku, a zbiór $A = \{1,2,3,4\}$ jest częściowo uporządkowany tą relacją.

□

Uwaga 3.1.2 *Jeśli relacja $\mathcal{R}$ jest częściowym porządkiem, to zamiast pisać $a\mathcal{R}b$, będziemy pisali $a \preceq b$. Jeśli dodatkowo $a \neq b$, to napiszemy $a \prec b$.*

□

Definicja 3.1.12 *Niech A będzie zbiorem częściowo uporządkowanym relacją $\preceq$. Dla $a,b \in A$ powiemy, że b jest następnikiem a, jeśli:*

1. *$a \prec b$,*
2. *$\forall_{c\in A} \quad a \prec c \Rightarrow b \preceq c$.*

□

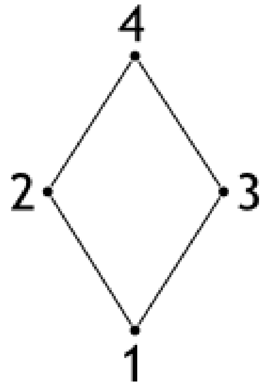
Uwaga 3.1.3 *Przez diagram Hassego będziemy rozumieli graf relacji częściowo uporządkowanej, w którym krawędzie łączą wierzchołki a,b tylko wtedy, gdy b jest następnikiem a.*

□

Zadanie 3.1.19 *Dany jest zbiór $A = \{1,2,3,4\}$ oraz relacja $\mathcal{R}$ określona jak w zadaniu poprzednim. Narysować diagram Hassego tej relacji.*

Rozwiązanie

Zauważmy, że $1 \prec 2$, $1 \prec 3$ i $1 \prec 4$ oraz $2 \prec 4$ i $3 \prec 4$. W diagramie Hassego tylko 2 i 3 będą następnikami 1. 4 będzie następnikiem 2 oraz 3.



Rysunek 3.7: Diagram Hassego relacji $\mathcal{R}$

□

Definicja 3.1.13 *Relację $\preceq$ częściowego porządku nazwiemy relacją porządku, gdy*

$$\forall_{a,b\in A} \quad a \preceq b \quad lub \quad b \preceq a.$$

□

Uwaga 3.1.4 *O zbiorze A, na którym jest określona relacja porządku, powiemy, że jest zbiorem uporządkowanym. Można spotkać się również z określeniem uporządkowany liniowo.*

□

Zadanie 3.1.20 *Czy relacja $\mathcal{R}$ określona wzorem*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y, \;\; x, y \in \mathbf{Z}$$

porządkuje zbiór **Z***?*

Rozwiązanie

Sprawdzimy, czy relacja jest porządkiem. Relacja $\mathcal{R}$ jest zwrotna, bowiem $\forall_{x\in\mathbf{Z}} \quad x \leq x$. Ponieważ $\forall_{x,y\in\mathbf{Z}} \quad (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$, więc jest ona antysymetryczna. Ponadto $x \leq y$ oraz $y \leq z$, czyli $x-y \leq 0$ i $y-z \leq 0$. Dodając obie nierówności stronami, otrzymamy, że

$$x - y + y - z \leq 0 \Leftrightarrow x - z \leq 0 \Leftrightarrow x \leq z.$$

Z powyższego wynika, że $\mathcal{R}$ jest przechodnia. Z *prawa trichotomii* $\forall_{x,y} \in \mathbf{Z} \;\; x \leq y \vee y \leq x$. Wykazaliśmy zatem, że **Z** jest zbiorem uporządkowanym relacją słabej mniejszości $\leq$.

$\square$

Definicja 3.1.14 *Niech A_1, A_2 będą zbiorami częściowo uporządkowanymi relacjami $\preceq_1$ i $\preceq_2$. Na ich produkcie $A_1 \times A_2$ określmy relację $\mathcal{R}$:*

$$(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Leftrightarrow a \prec_1 a' \ \ lub \ \ a = a' \Rightarrow b \preceq_2 b'.$$

Relację $\mathcal{R}$, będziemy oznaczać $\preceq_L$ i nazywać porządkiem leksykograficznym na $A_1 \times A_2$.

$\square$

Fakt 3.1.2 *Relacja $\preceq_L$ jest relacją częściowego porządku.*

$\square$

Zadanie 3.1.21 *Uogólnić definicję uporządkowania leksykograficznego na przypadek produktu trzech zbiorów.*

Rozwiązanie

Z założenia dane są trzy częściowo uporządkowane relacjami $\preceq_i$ zbiory A_i dla $i = 1, 2, 3$. Ponieważ produkt kartezjański jest łączny, możemy napisać

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3.$$

Z definicji uporządkowania leksykograficznego i powyższej uwagi dostaniemy teraz

$$(a_1, a_2, a_3) \preceq_L (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow ((a_1, a_2), a_3) \preceq_L ((b_1, b_2), b_3) \Leftrightarrow$$
$$(a_1, a_2) \prec_L (b_1, b_2) \ lub \ (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \Rightarrow a_3 \preceq_3 b_3 \Leftrightarrow$$
$$a_1 \prec_1 b_1 \ lub \ a_1 = b_1 \Rightarrow a_2 \preceq_2 b_2 \ lub \ (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \Rightarrow a_3 \preceq_3 b_3.$$

$\square$

Zadanie 3.1.22 *Uporządkować leksykograficznie zbiór wszystkich 3-literowych słów zbudowanych z liter a, b z porządkiem naturalnym.*

Rozwiązanie

Zbiór wszystkich 3-literowych słów powstałych z dwóch liter składa się z 8 elementów:

$$\{aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb\}.$$

Ponieważ $a \prec b$, więc z wyniku ostatniego zadania wynika, że (dlaczego?)

$$aaa \prec_L aab \prec_L aba \prec_L abb \prec_L baa \prec_L bab \prec_L bba \prec_L bbb.$$

$\square$

Definicja 3.1.15 *Niech A-zbiór częściowo uporządkowany relacją $\preceq$, B-niepusty jego podzbiór. Zbiór B jest ograniczony z góry, jeśli istnieje w zbiorze A taki element a_g, że*

$$\forall_{b\in B} \;\; b \preceq a_g.$$

Zbiór B jest ograniczony z dołu, jeśli istnieje w zbiorze A taki element a_d, że

$$\forall_{b\in B} \;\; a_d \preceq b.$$

$\square$

Definicja 3.1.16 *Powiemy, że częściowo uporządkowany zbiór A jest kratą, jeśli*

$$\forall_{a,b\in A} \; \sup\{a,b\} \in A \;\; oraz \;\; \inf\{a,b\} \in A.$$

Pozwala to nam zdefiniować na zbiorze A dwa działania kratowe

$$a \vee b := \sup\{a,b\}, \;\; a \wedge b := \inf\{a,b\}.$$

$\square$

Zadanie 3.1.23 *Niech $A = \{1,2,3\}$. Czy rodzina $\mathcal{P}(A)$ z relacją $\subseteq$ jest kratą? Jak wyglądają działania kratowe?*

Rozwiązanie

Dobrze wiadomo, że relacja $\subseteq$ jet częściowym porządkiem na zbiórze $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
Weźmy diagram Hassego dla tej relacji.

$\square$

Jak wynika z rysunku, mamy na przykład:

$$\sup(\{1\},\{3\}) = \{1\} \vee \{3\} = \{1,3\}$$

$$\sup(\{1,2\},\{1,3\}) = \{1,2\} \vee \{1,3\} = \{1,2,3\}$$

$$\inf(\{1,3\},\{3\}) = \{1,3\} \wedge \{3\} = \{3\}$$

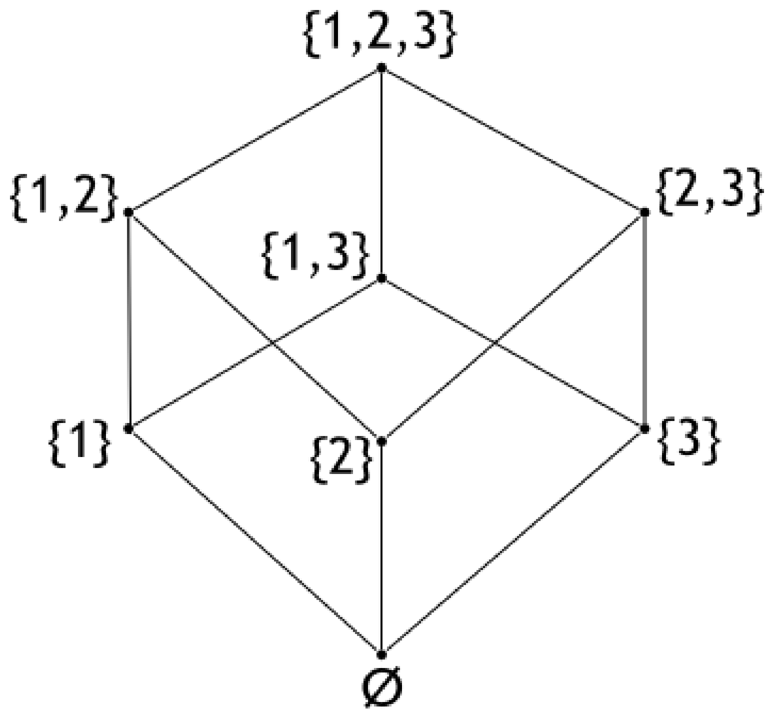
$$\inf(\{1,2\},\{3\}) = \{1,2\} \wedge \{3\} = \emptyset$$

I ogólnie, nietrudno zauważyć, że dla $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(A)$

$$\sup(A_1, A_2) = A_1 \cup A_2,$$

$$\inf(A_1, A_2) = A_1 \cap A_2.$$

$\square$



Rysunek 3.8: Diagram Hassego zbioru $\mathcal{P}(A)$ z relacją $\subseteq$

3.2 Zadania

Zadanie 3.2.1 *W zbiorze* $\mathbf{N}_+$ *określona jest relacja dwuargumentowa* $\mathcal{R}$ *następująco:*

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow 2m + n = 13.$$

Zapisać tę relację jako zbiór par uporządkowanych.

Zadanie 3.2.2 *Niech* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ *oraz*

1. $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, b), (3, d), (4, b), (2, c)\}$,
2. $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$.

Czy relacja $\mathcal{R}$ *jest funkcją?*

Zadanie 3.2.3 *Niech* $\mathcal{R}_1$ *- relacja zwrotna na zbiorze* X *oraz* $\mathcal{R}_2$ *- relacja zwrotna na zbiorze* X*. Czy ich suma jest relacją zwrotną?*

Zadanie 3.2.4 *Sprawdzić, czy suma dwóch relacji symetrycznych na zbiorze* X *jest symetryczna na tym zbiorze.*

Zadanie 3.2.5 *Podać przykład relacji, która nie jest przechodnia.*

Zadanie 3.2.6 *Uzasadnić, że dla relacji* $\mathcal{R} \subset X \times X$ *następujące warunki są równoważne:*

1. $\mathcal{R}$ *jest symetryczna,*

2. $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{\leftarrow}$,

3. $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\leftarrow}$.

Zadanie 3.2.7 *Dane są relacje określone na zbiorze* $X = \{1, 2, 3\}$*:* $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ *oraz* $\mathcal{R}_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. *Wyznaczyć* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.

Zadanie 3.2.8 *Określić, które z własności: RZ, RA, RS, RP w zbiorze* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *spełnia relacja* $\mathcal{R}$ *określona następująco:*

$$\forall_{a,b\in A} \quad a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |a - b| = 2.$$

Zadanie 3.2.9 *Niech* $\mathcal{R}$ *będzie relacją określoną następująco:*

1. $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2|(x + y), \quad x, y \in \mathbf{N}$,

2. $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2, \quad x, y \in \mathbf{R}$,

3. $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x + 2, \quad x, y \in \mathbf{Q}$.

Które z własności RZ, RA, RS, RP ma ta relacja?

Zadanie 3.2.10 *Niech* $\mathcal{R}$ *będzie relacją określoną jak z zadaniu 3.2.8. Narysować graf odpowiadający tej relacji.*

Zadanie 3.2.11 *Niech* $\mathcal{R}_1$ *i* $\mathcal{R}_2$ *- relacje okreśone jak w zadaniu 3.2.7. Narysować grafy reprezentujące te relacje. Narysować graf relacji* $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.

Zadanie 3.2.12 *Podać macierz sąsiedztwa relacji* $\mathcal{R}$ *z zadania 3.2.8.*

Zadanie 3.2.13 *Podać macierz reprezentującą relację* $\mathcal{R}^{\leftarrow}$, *gdzie* $\mathcal{R}$ *- relacja z zadania 3.2.8.*

Zadanie 3.2.14 *Podać macierz sąsiedztwa relacji* $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ *oraz* $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$, *gdzie* $\mathcal{R}_1$ *i* $\mathcal{R}_2$ *to relacje określone w zadaniu 3.2.7.*

Zadanie 3.2.15 *Niech* $X = \{1, 2, 3\}$ *oraz określmy relację* $\mathcal{R}$ *na zbiorze* X *następująco:*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \neq 3.$$

Czy jest to relacja równoważności?

Zadanie 3.2.16 *Relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze liczb rzeczywistych ma postać*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = 2.$$

Czy jest to relacja równoważności? Jeśli tak, to wyznaczyć jej klasy abstrakcji.

Zadanie 3.2.17 *Relacja $\mathcal{R}$ określona jest na zbiorze liczb całkowitych parzystych następująco:*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3|(x - y).$$

Czy jest to relacja równoważności? Jeśli tak, to wyznaczyć jej klasy abstrakcji.

Zadanie 3.2.18 *Płaszczyznę R^2 dzielimy na zbiory będące okręgami o środku w początku układu współrzędnych. Znaleźć relację $\mathcal{R}$, dla której klasami abstrakcji będą te zbiory.*

Zadanie 3.2.19 *Sprawdzić, czy relacja*

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,d),(b,d),(c,d)\}$$

określona na zbiorze $X = \{a,b,c,d\}$ jest relacją częściowego porządku.

Zadanie 3.2.20 *Niech $A = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$. Określmy relację $\mathcal{R}$ następująco:*

$$\forall_{x,y\in A} \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y.$$

Czy zbiór A jest częściowo uporządkowany? Jeśli tak, to narysować diagram Hassego dla tego zbioru.

Zadanie 3.2.21 *Uporządkować leksykograficznie zbiór wszystkich 4-literowych słów zbudowanych z liter a i c.*

Zadanie 3.2.22 *Uzasadnić, że relacja $\preceq_n$ określona następująco $\forall_{s_1,s_2\in S(A)} \quad s_1 \preceq_n s_2 \Leftrightarrow$ słowo s_1 jest współpoczątkowe ze słowem s_2, czyli $s_1 \preceq_n s_2 \Leftrightarrow \exists_{s\in S(A)}$ (być może λ) $s_1 s = s_2$, jest częściowym porządkiem na $S(A)$, ale nie jest porządkiem.*

Zadanie 3.2.23 *Weźmy rodzinę $\mathcal{P}(X)$ z relacją $\subseteq$. Uzasadnić, że*

1. *$\subseteq$ jest częściowym porządkiem,*
2. *$\subset$ nie jest porządkiem.*

Znaleźć element najmniejszy i największy w $\mathcal{P}(X)$.

Zadanie 3.2.24 *Czy na niepustym zbiorze można zdefiniować relację, która jednocześnie będzie częściowym porządkiem i relacją równoważności?*

Zadanie 3.2.25 *Weźmy zbiór $\mathbf{R}$ z relacją $\leq$. Czy $(\mathbf{R}, \leq)$ jest kratą? Jeśli tak, to jak wyglądają działania kratowe $x \vee y$ i $x \wedge y$?*