# Finanse i Rachunkowość
# studia niestacjonarne/stacjonarne
## *Model Przepływów Międzygałęziowych*

8 listopada 2015

## 1 Opis zjawiska

Będziemy obserwowali proces *tworzenia i podziału* produkcji materialnej zachodzący w *systemie gospodarczym* składającym się z jednorodnych pod względem powstającego produktu *gałęzi*. Założymy, że produkcja każdej gałęzi mierzona jest w jednostkach fizycznych, co oznacza, że analizę zjawiska przeprowadzimy w tzw. *podejściu ilościowym*.

Z punktu widzenia czasu, obserwację taką można przeprowadzić za okres miniony (*ex post*) – służy wtedy ocenie dotychczasowych działań oraz za okres przyszły (*ex ante*) – wykorzystywana jest dla potrzeb planowania.

**Założenia.** Sytem produkcyjny $\mathcal{S}$ złożony jest z $n \geqslant 2$ gałęzi produkcyjnych $\mathbf{G}_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$. W każdej z gałęzi produkowany jest jeden produkt $\mathbf{P}_j$. Wielkość *produkcji globalnej* $j$–tej gałęzi oznaczymy przez $\mathbf{Q}_j$ (w jednostkach). *Przepływ*, będący efektem podziału produkcji globalnej, z $i$–tej gałęzi do $j$–tej oznaczymy przez $\mathbf{q}_{ij}$ (w jednostkach). Wielkość *produktu końcowego* dla $\mathbf{G}_j$ jako efektu pomniejszenia produkcji globalnej o łączną ilość przepływów oznaczymy przez $\mathbf{q_j}$ (w jednostkach.)

Wtedy *bilans* w ujęciu ilościowym, dla każdej gałęzi $\mathbf{G}_j$ przedstawia się następująco

$$(\text{prod. globalna})_j = (\text{zużycie na cele prod. w } \mathcal{S})_j + (\text{produkcja końcowa})_j. \quad (1)$$

Dane do powyższego bilansu kumuluje się w postaci tzw. *tablicy przepływów międzygałęziowych* (TPM), która wygląda następująco

| *Gałąź* | *Produkcja globalna* | *Przepływ* $j \to i$ | | | | *Produkcja końcowa* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $q_{j1}$ | $q_{j2}$ | $\ldots$ | $q_{jn}$ | |
| $G_1$ | $Q_1$ | $q_{11}$ | $q_{12}$ | $\ldots$ | $q_{1n}$ | $q_1$ |
| $G_2$ | $Q_2$ | $q_{21}$ | $q_{22}$ | $\ldots$ | $q_{2n}$ | $q_2$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $G_j$ | $Q_j$ | $q_{j1}$ | $q_{j2}$ | $\ldots$ | $q_{jn}$ | $q_j$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $G_n$ | $Q_n$ | $q_{n1}$ | $q_{n2}$ | $\ldots$ | $q_{nn}$ | $q_n$ |

# 2 Model matematyczny przepływów międzygałęziowych

Dla każdej gałęzi $\mathbf{G}_j$, bilans (1) możemy zapisać następująco

$$\mathbf{Q}_j = \Big(\mathbf{q}_{j1} + \mathbf{q}_{j2} + \ldots + \mathbf{q}_{jn}\Big) + \mathbf{q}_j, \tag{2}$$

gdzie wyrażenie w nawiasie po prawej stronie równości (2) jest miarą zużycia na cele produkcji w systemie $\mathcal{S}$ pochodzącego z gałęzi $j$–tej.

W. Leontief zauważył, że poprawna interpretacja bilansu (1) wymaga innego zapisania sumy w nawiasie równości (2). W tym celu każdy składnik tej sumy zapiszemy następująco

$$\mathbf{q}_{j1} = \frac{\mathbf{q}_{j1}}{\mathbf{Q}_1}\mathbf{Q}_1,\ \mathbf{q}_{j2} = \frac{\mathbf{q}_{j2}}{\mathbf{Q}_2}\mathbf{Q}_2, \ldots,\ \mathbf{q}_{jn} = \frac{\mathbf{q}_{jn}}{\mathbf{Q}_n}\mathbf{Q}_n. \tag{3}$$

Dla każdego $j, i$ definiujemy teraz liczby oznaczane przez $\mathbf{a}_{ji}$, gdzie

$$\mathbf{a_{ji}} = \frac{\mathbf{q}_{ji}}{\mathbf{Q}_i}. \tag{4}$$

Wtedy równości (3) i (4) pozwalają zapisać sumę w nawiasie bilansu (2) w postaci następującej

$$\mathbf{Q}_j = \Big(\mathbf{a}_{j1}\mathbf{Q}_1 + \mathbf{a}_{j2}\mathbf{Q}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{jn}\mathbf{Q}_n\Big) + \mathbf{q}_j, \tag{5}$$

co przy użyciu notacji sumacyjnej oznacza, że dla każdej gałęzi $\mathbf{G}_j$ zachodzi równość

$$\mathbf{Q}_j = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_{jk}\mathbf{Q}_k \ + \mathbf{q}_j. \tag{6}$$

Ostatnia równość pozwala nam sformułować *postać macierzową modelu przepływów międzygałęziowych*. W tym celu zdefiniujemy trzy macierze

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix},\ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix},\ \mathbf{A} = [a_{ji}].$$

Wtedy fakt, że bilans opisany równaniem (6) zachodzi dla wszystkich gałęzi obserwowanego systemu produkcyjnego $\mathcal{S}$ możemy na podstawie wyżej zdefiniowanych macierzy i definicji mnożenia macierzy zapisać w postaci *równania macierzowego*

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{q}. \tag{7}$$

**Uwaga 1**

1. Równanie macierzowe (7) dalej będziemy oznaczali symbolem MPM.
2. W równaniu MPM występujące macierze nazywają się i mają następujące interpretacje:
   - $\mathbf{Q}$ nazywamy *wektorem produkcji globalnej*;
   - $\mathbf{q}$ nazywamy *wektorem produktu końcowego*;
   - $\mathbf{A}$ nazywamy *macierzą współczynników technicznych.* Wtedy $\mathbf{a_{ij}}$ dane wzorem (4) ma następującą interpretację ekonomiczną

     > określa ile jednostek produktu $i$–tej gałęzi należy zużyć, aby wyprodukować jedną jednostkę produktu globalnego w gałęzi $j$–tej.

     Ponieważ o wielkości $\mathbf{a_{ij}}$ decyduje zastosowana w systemie $\mathcal{S}$ technologia, macierz $\mathbf{A}$ nazywamy *macierzą współczynników technicznych.*
3. Równanie MPM obowiązuje na daną chwilę czasu $t$, dlatego dalej będzie zapisywane w postaci
$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{A}_t\mathbf{Q}_t + \mathbf{q}_t, \tag{8}$$
   z uwagą, że
   (a) za okres przeszły, czyli w podejściu *ex post* lub
   (b) za okres przyszły, czyli w podejściu *ex ante.*
4. Równanie (8) rozumiane jest jako *problem decyzyjny*, a więc znając macierz $\mathbf{A}$ szukamy wektorów produkcji globalnej i produktu końcowego, aby spełniały MPM. Poniżej rozwiążemy każdą z tych sytuacji.

**Fakt 1** *Przypuśćmy, że znamy macierz współczynników technicznych i wektor produkcji globalnej. Wtedy*
$$\mathbf{q}_t = \Big(I_n - \mathbf{A}_t\Big)\mathbf{Q}_t. \tag{9}$$

Istotnie, równanie (8) jest równoważne

$$\mathbf{Q}_t - \mathbf{A}_t\mathbf{Q}_t = \mathbf{q}_t.$$

Ale $I_n\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}_t$, skąd z zasady rozdzielności mnożenia mamy równość (9).

**Uwaga 2**

Macierz $I_n - \mathbf{A}_t$ nazywamy *macierzą Leontiewa* albo *macierzą struktury technicznej.*

**Fakt 2** *Przypuśćmy, że znamy macierz współczynników technicznych i wektor produktu końcowego. Wtedy*

$$\mathbf{Q}_t = \Big(I_n - \mathbf{A}_t\Big)^{-1}\mathbf{q}, \tag{10}$$

*o ile macierz* $I_n - \mathbf{A}_t$ *jest nieosobliwa.*

Równość (10) wynika wprost z (9), o ile macierz $I_n - \mathbf{A}_t$ jest nieosobliwa.

**Uwaga 3**

Macierz $\Big(I_n - \mathbf{A}_t\Big)^{-1}$ nazywamy *macierzą dodatkowego zapotrzebowania.* Aby poprawnie zinterpretoweać jej znaczenie w procesie zjawiska przepływów założymy, że zjawisko to będziemy obserwowali w dwóch chwilach czasu: $t$ oraz $t + \triangle t$, gdzie $\triangle t > 0$, przy założeniu, że w obu tych chwilach macierz współczynników technicznych jest jednakowa i dana jest przez $\mathbf{A}$.

Wtedy, z MPM dla tych chwil dostaniemy odpowiednio

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{A}\mathbf{Q}_t + \mathbf{q}_t,$$

$$\mathbf{Q}_{t+\triangle t} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{t+\triangle t} + \mathbf{q}_{t+\triangle t}.$$

Odejmując stronami oba równania od siebie, po skorzystaniu z zasady rozdzielności mnożenia dostaniemy

$$\triangle\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{t+\triangle t} - \mathbf{Q}_t = \mathbf{A}\Big(\mathbf{Q}_{t+\triangle t} - \mathbf{Q}_t\Big) + \mathbf{q}_{t+\triangle t} - \mathbf{q}_t,$$

co zapiszemy następująco

$$\triangle\mathbf{Q} = \mathbf{A} \triangle \mathbf{Q} + \triangle\mathbf{q}.$$

Rozwiązując teraz ostatnie równanie ze względu na $\triangle\mathbf{Q}$, przy założeniu, że istnieje macierz dodatkowego zapotrzebowania otrzymamy

$$\triangle\mathbf{Q} = \Big(I_n - \mathbf{A}\Big)^{-1} \triangle \mathbf{q}.$$

Z ostatniej równości wynika teraz, że na to aby produkt końcowy zwiększył się o jeden, produkcja globalna musi zwiększyć się o tyle na ile wskazuje macierz $\Big(I_n - \mathbf{A}\Big)^{-1}$, co stanowi jej interpretację.

Na zakończenie przedstawione powyżej wyniki zilustrujemy następującym przykładem.

**Przykład 1** *Firma w okresie* $t$ *produkuje* $3$ *wyroby (w trzech wydziałach), co przedstawiono w poniższej tabeli*

| *Wyrób* | $Q_i$ | $q_{i1}$ | $q_{i2}$ | $q_{i3}$ | $q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *240* | *72* | *36* | *90* | *42* |
| *2* | *180* | *24* | *54* | *30* | *72* |
| *3* | *300* | *48* | *54* | *60* | *138* |

*Należy:*

1. *napisać równanie MPM;*
2. *przyjmując, że w następnym okresie w chwili* $t{+}1$ *technika wytwarzania nie uległa zmianie, wyznaczyć zmiany w produkcie końcowym, gdzie w okresie* $t+1$ *produkcja globalna wzrosła o* $\triangle Q = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ -50 \end{bmatrix}$*;*
3. *obliczyć rozmiar produkcji globalnej, przy której ilość produktu końcowego wynosi* $q_1 = 51,\ q_2 = 90,\ q_3 = 90.$

Rozwiązanie

1. Polega na ustaleniu wartości macierzy opisujących MPM. Wygląda to następująco:
$$\mathbf{Q}_t = \begin{bmatrix} 240 \\ 180 \\ 300 \end{bmatrix},\ \mathbf{q}_t = \begin{bmatrix} 42 \\ 72 \\ 138 \end{bmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}.$$
Dalej należy zapisać równanie MPM w postaci macierzowej po to aby rozwinąć je do postaci analitycznej, dla każdego wydziału/wyrobu. Na przykład dla wyrobu drugiego równanie MPM ma postać
$$180 = 0,1 \cdot 240 + 0,3 \cdot 180 + 0,1 \cdot 300 + 72.$$

2. Wyprowadzamy zależności jak w uwadze 3, czyli
$$\triangle\mathbf{Q} = \mathbf{A} \triangle \mathbf{Q} + \triangle\mathbf{q},$$
skąd po przekształceniu otrzymamy
$$\triangle\mathbf{q} = \big(I_3 - \mathbf{A}\big) \triangle \mathbf{Q}.$$
Podstawiamy do powyższej zależności dane liczbowe, wyliczamy macierz Leontiewa, co daje $\triangle\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 16 \\ 25 \\ -51 \end{bmatrix}$.

3. Wiedząc, że $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 51 \\ 90 \\ 90 \end{bmatrix}$ skorzystamy z wyniku (10) faktu 3. W tym celu należy wyznaczyć macierz dodatkowego zapotrzebowania. Z danych liczbowych wynika, że
$$\left(I_3 - \mathbf{A}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{53}{30} & \frac{25}{30} & \frac{23}{30} \\ \frac{10}{30} & \frac{50}{30} & \frac{10}{30} \\ \frac{17}{30} & \frac{25}{30} & \frac{47}{30} \end{bmatrix}.$$
Dlatego poszukiwany wektor produkcji globalnej ma wartość $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 134,1 \\ 197 \\ 244,9 \end{bmatrix}$.