3.14–**czyli imieniny liczby π**

Ryszard Rębowski
Wydział Zarządzania i Informatyki
PWSZ im. Witelona w Legnicy

14 marca 2009

Któż z nas nie słyszał o π, nawet jeśli nie zdaje sobie sprawy z tego, że litera π pochodzi z alfabetu greckiego. Bowiem nie o znajomość greki tutaj chodzi, a jak większość z nas myśli, i słusznie, chodzi o koło, czyli o geometrię. Każdy z nas pewnie kiedyś na lekcji matematyki badał zależność obwodu tego koła od jego średnicy i w wyniku kilku pomiarów stwierdził zadziwiającą zależność:

$$\frac{L}{d} = const.,$$

gdzie L oznacza obwód koła, d jego średnicę.

Właśnie to spostrzeżenie rzuca się od razu w oczy, aczkolwiek wcale nie jest jasne dlaczego tak jest! Jeśli już to zauważyliśmy, to rzeczą naturalną jest zapytać o wartość tej stałej. Tym razem jest jeszcze gorzej aniżeli zdajemy sobie z tego sprawę. Niewtajemniczeni chóralnie odpowiadają $3,14$, ale tym razem populizm nie zwycięża, bowiem odpowiedź jest niepoprawna!

Co do jednego wątpliwości nie powinniśmy mieć–ta stała, o której mowa jest wyżej jest liczbą. W takim razie pytanie powinno brzmieć: *jaką liczbą?*.

Zostawmy na chwilę ostatnią kwestię i zajmijmy się samą regułą proporcji, o której mowa wyżej. Spróbujmy ją uzasadnić.

W tym celu weźmy koło o promieniu R. Niech L oznacza jego obwód. Wybierzmy z tego kół jego wycinek o kącie środkowym $\alpha \in (0^o, 360^o)$. Wtedy z zasady proporcji długość $\tilde{L}$ tego wycinka jest równa

$$\tilde{L} = L\frac{\alpha}{360}.$$

Załóżmy, że $\alpha = \alpha_o$ jest takie, że $\tilde{L} = R$. Wtedy powyższa proporcja będzie miała postać

$$\frac{L}{R} \cdot \alpha_o = 360^o,$$

co oznacza, że kąt pełny jest równy $\frac{L}{R}$ jednostek, gdzie jednostką tą jest miara kąta α_o.

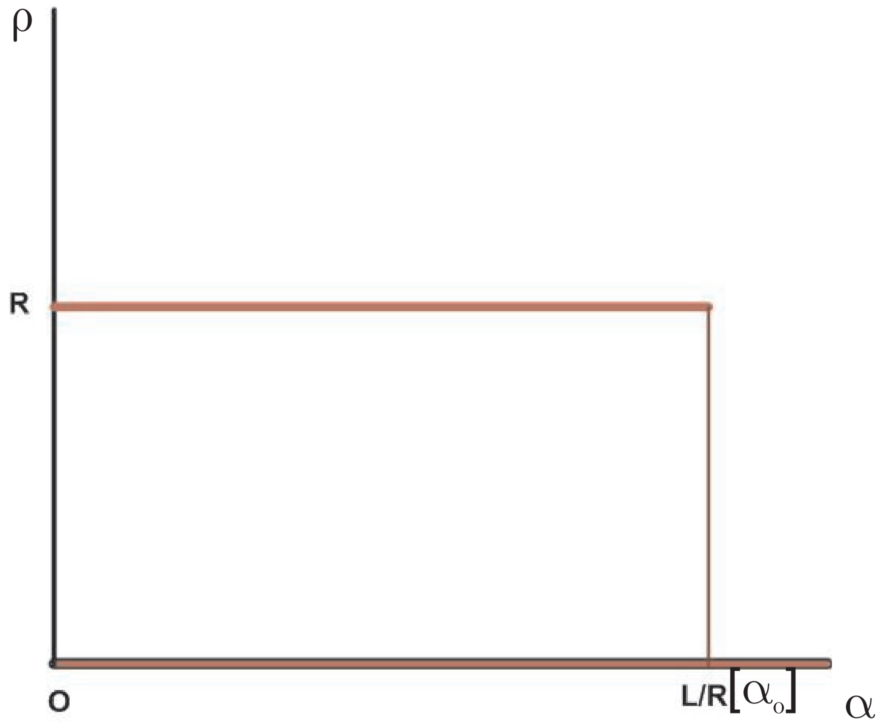
Spójrzmy teraz na rozważane koło z punktu widzenia jego środka i półprostej wyprowadzonej z tego środka. Wtedy położenie każdego punktu należącego do tego koła możemy opisać parą dwóch liczb:

ρ–odległością tego punktu od środka koła,

φ–miarą kąta skierowanego w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara,

gdzie $\varphi \in < 0^o, 360^o)$.

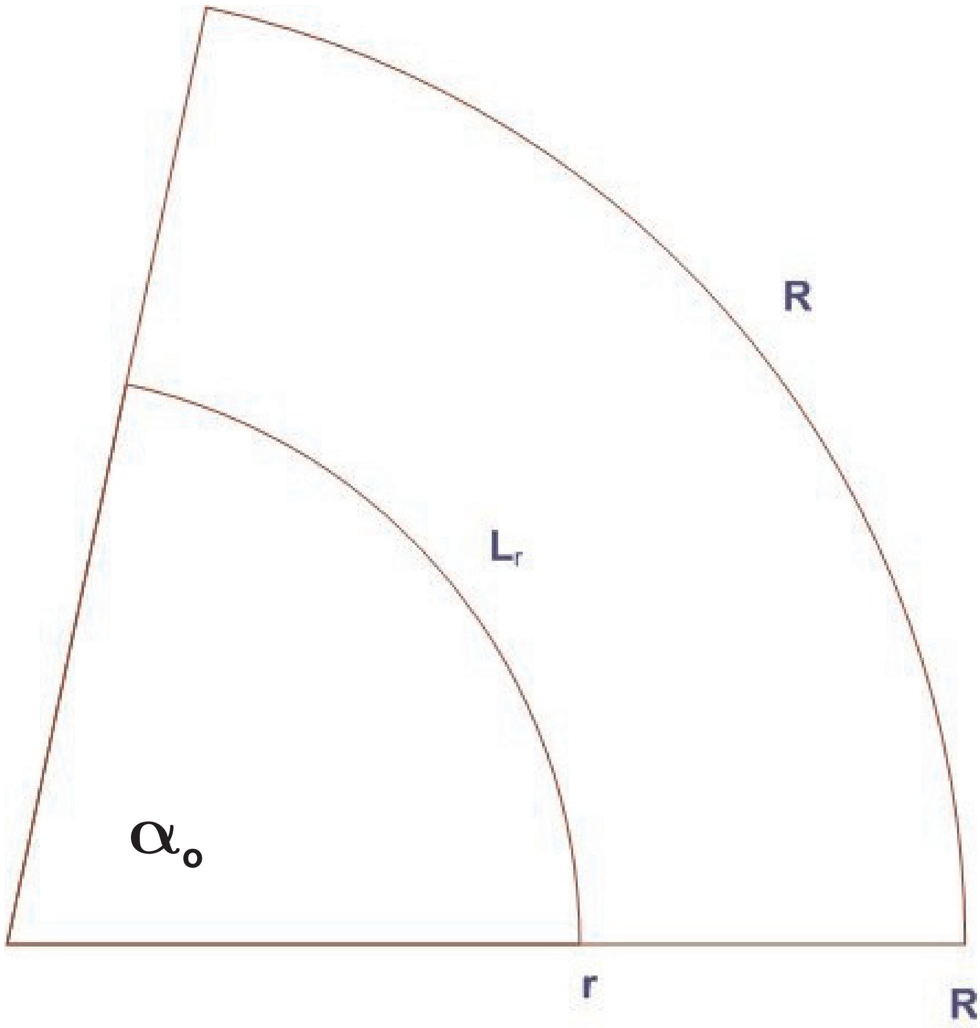
Weźmy teraz układ współrzędnych kartezjańskich, gdzie na osi poziomej będziemy odmierzali wartości kąta φ w jednostkach α_o, zaś na osi pionowej wartości ρ. Wtedy wszystkie punkty z koła o promieniu R można opisać za pomocą punktów znajdujących się w prostokącie umiejscowionym w zdefiniowanym wyżej układzie, którego podstawą jest odcinek $< 0, \frac{L}{R})$ leżący na osi $O\varphi$, natomiast (lewym) bokiem odcinek $< 0, R >$ leżący na osi $O\rho$ (patrz rysunek 1).



Rysunek 1: obraz w układzie $O\varphi\rho$ koła

Zauważmy, że wtedy pole tego prostokąta równe jest długości okręgu naszego koła. Weźmy teraz wycinki naszego koła o parametrach: $\alpha_o, r < R$, jak to pokazano na rysunku 2, gdzie przez L_r oznaczyliśmy długość łuku wycinka o promieniu r.

Wtedy wycinki w układzie $O\varphi\rho$ będą prostokątami jak na rysunku 3.



Rysunek 2: wycinek kołowy o parametrach α_o, r, R

W takim razie z zasady proporcji, w jednostkach α_o, L_r ma długość

$$L_r = r \cdot 1\ [\alpha_o] = r,$$

dla każdego $0 < r \leq R$.

W szczególności, podstawiając $r = R$ i z uwagi, że $L_R = R$ (patrz rysunek 2), w standardowych jednostkach dostaniemy

$$R = L\frac{\alpha_o}{360}.$$

Pokazaliśmy zatem, że

dla każdego koła o promieniu R i długości okręgu L zachodzi równość

$$\boldsymbol{L = \frac{360}{\alpha_o} R.}$$

W szczególności

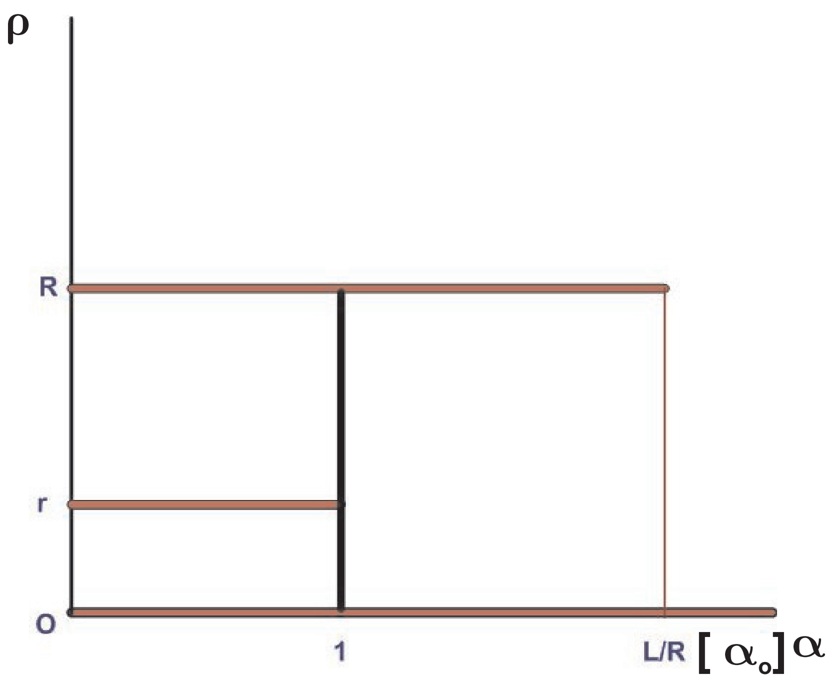
$$\boldsymbol{\frac{L}{d} = \frac{180}{\alpha_o},\ d = 2R.}$$

Oznaczając teraz przez $\boldsymbol{\pi}$ wartość liczby

$$\boldsymbol{\frac{180}{\alpha_o},}$$

możemy zapisać

$$\boldsymbol{L = 2\pi R.}$$



Rysunek 3: obrazy wycinków kołowych w układzie $\boldsymbol{O\varphi\rho}$

Uwagi

1. Dobrze wiadomo, że miara kąta $\boldsymbol{\alpha_o}$ w przybliżeniu ma wartość

$$\boldsymbol{57,29577951^o}$$

   i jednostkę $\boldsymbol{1[\alpha_o]}$ nazywa się *radianem*.

2. Wtedy wartość przybliżona liczby π jest równa

$$\pi \cong 3,14159265376.$$

3. Wykazane wyżej zależności pozwalają konwertować jednostkę $[^o]$ na $[rad]$ i na odwrót. Jeśli dla kąta płaskiego α, przez α^o oznaczymy jego miarę w stopniach, a przez $\alpha(rad)$ w radianach, to

$$\alpha(rad) = \frac{\alpha^o}{180^o}\pi[rad].$$

   Jak pokazał w 1882 roku F.Lindemann, liczba π nie jest pierwiastkiem żadnego *równania algebraicznego*, a więc postaci $W(x) = 0$, gdzie W oznacza dowolny wielomian rzeczywisty o współczynnikach całkowitych. Jako taka nie może być liczbą wymierną. Pozwoliło to wraz z *twierdzeniem Wantzela–Gaussa* rozstrzygnąć słynny problem *szkoły pitagorejskiej–problem kwadratury koła.* Pitagorejczycy pytali się *czy za pomocą linijki i cykrla można skonstruować kwadrat, którego pole będzie równe polu danego koła?.* Z twierdzenia Wantzela–Gaussa wynika, że jeśli kwadratura koła miałaby rozwiązanie, to liczba π musiałaby być algebraiczna, a tak nie jest, co wykazał Lindemann.

4. Na liczbę π, jak pokazał w 1748 roku L. Euler należy spojrzeć szerzej–z perspektywy *liczb zespolonych.* Ze słynnego wzoru Eulera wynika, że

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

   Fenomen tego wzoru polega na tym, że obok siebie znalazło się pięć z sześciu najważniejszych liczb (zabrakło miejsca na słynną liczbę *fi* związaną z *ciągiem Fibonacciego* i ze *złotą proporcją*).

5. Liczba π doczekała się również swojej interpretacji *statystycznej.* W roku 1773 *Georges–Louis Leclerc hrabia Buffon* sformułował swój słynny problem. Pytał w nim *jakie jest prawdopodobieństwo, że igła o długości l rzucona na płaszczyznę, na której naniesione są równoległe i oddalone od siebie o l proste, przetnie taką prostą.* Metodami *probabilistycznego modelu geometrycznego* można pokazać, ze prawdopodobieństwo to jest równe $\frac{2}{\pi}$. Z kolei metodami statystyki matematycznej pozwala to uzyskiwać bardzo dokładne przybliżenie wartości liczby π, bowiem z *mocnego prawa wielkich liczb* wynika, że

$$\pi \cong \frac{2n}{k_n} \text{ z prawdopodobieństwem } 1,$$

   gdzie n oznacza liczbę powtórzeń rzutów igłą, k_n liczbę przecięć.

Artykuł ten dedykuję swoim byłym i obecnym studentom PWSZ w Legnicy. Zajęcia jakie odbywaliśmy w ramach kursów z: matematyki, matematyki dyskretnej i metod probabilistycznych powinny przybliżyć Państwu poruszoną w tym artykule tematykę. Rozmawialiśmy bowiem o: liczbach zespolonych i ich postaci wykładniczej, równaniach algebraicznych, prawdopodobieństwie geometrycznym, prawach wielkich liczb, ciągach rekurencyjnych Fibonacciego i o statystyce matematycznej.