

# Rozdział 6

## Elementy teorii grafów i drzew

### 6.1 Wprowadzenie teoretyczne i przykłady

Mówimy, że mamy do czynienia z *grafem nieskierowanym*  $G$ , jeśli dany jest:

1. zbiór jego *wierzchołków*  $W(G)$ ,
2. zbiór jego *krawędzi*  $K(G)$ ,
3. funkcja  $\gamma$  kojarząca krawędzie z wierzchołkami, czyli

$$\gamma: K(G) \longrightarrow W(G) \times W(G), \text{ gdzie } \gamma(k) = (a, b).$$

Wtedy  $a, b \in W(G)$  nazywamy *końcami* krawędzi  $k \in K(G)$ .

Dalej założymy że  $W(G)$  jest skończony.

Interpretację graficzną grafu  $G$  nazywamy *wykresem* albo *rysunkiem grafu*.

**Zadanie 6.1.1** Niech  $A = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ ,  $B = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$  oraz

$$\gamma(k_1) = (w_1, w_1), \quad \gamma(k_2) = (w_2, w_3), \quad \gamma(k_3) = (w_3, w_4),$$

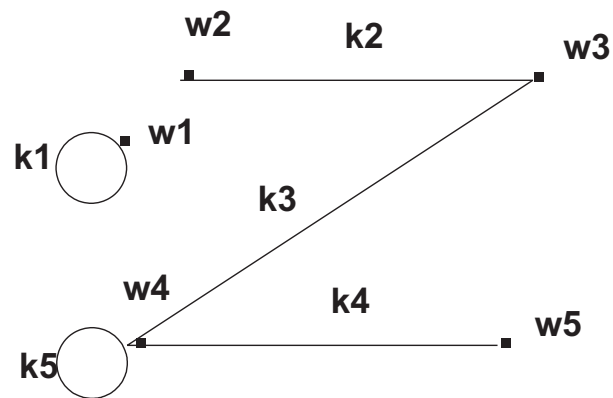
$$\gamma(k_4) = (w_4, w_5), \quad \gamma(k_5) = (w_4, w_4).$$

Uzasadnić, że  $A, B, \gamma$  definiują graf. Narysować jego wykres.

#### Rozwiązanie

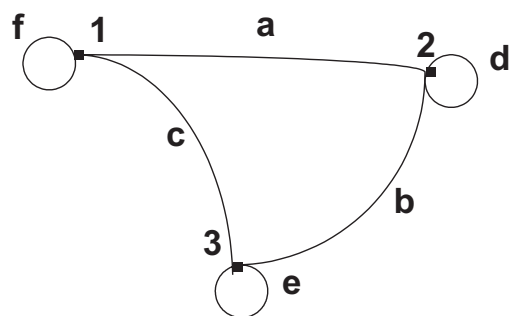
Zgodnie z definicją mamy:  $W(G) = A$ ,  $K(G) = B$ , gdzie  $\gamma$  jest funkcją kojarzącą zbiory krawędzi i wierzchołków tego grafu.

Rysunek grafu  $G$  może wyglądać jak na rysunku 6.1.

Rysunek 6.1: rysunek grafu  $G$ 

□

**Zadanie 6.1.2** *Uzasadnić, że rysunek 6.2 przedstawia wykres pewnego grafu.*

Rysunek 6.2: rysunek grafu  $G$ 

**Rozwiązanie**

Mamy tutaj graf  $G$ , dla którego

$$W(G) = \{1, 2, 3\}, \quad K(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$$

oraz przyporządkowanie  $\gamma$  określone wzorem

$$\begin{aligned} \gamma(a) &= (1, 2), \quad \gamma(b) = (2, 3), \quad \gamma(c) = (1, 3), \\ \gamma(d) &= (2, 2), \quad \gamma(e) = (3, 3), \quad \gamma(f) = (1, 1). \end{aligned}$$

□

W sytuacji jaką obserwowaliśmy na rysunkach 6.1 i 6.2, gdzie dla pewnej krawędzi  $k_i \in K(G)$  i wierzchołków  $a_{i_j}, b_{i_j}$ , zachodzi

$$\gamma(k_i) = (a_{i_j}, b_{i_j}) \text{ oraz } a_{i_j} = b_{i_j},$$

będziemy mówili, że krawędź  $k_i$  jest *pętlą*.

Przez *drogę długości  $n$*  w grafie  $G$  rozumiemy ciąg  $n$  krawędzi  $(k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_n})$  takich, że jeśli

$$\gamma(k_{i_j}) = (a_{i_j}, b_{i_j}), \text{ to } b_{i_j} = a_{i_{j+1}} \text{ dla } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

**Zadanie 6.1.3** *Wskazać drogę długości 3 dla grafu z zadania 6.1.1 Czy graf ten zawiera drogę długości 4?*

### Rozwiązanie

Wystarczy wziąć ciąg krawędzi

$$(k_2, k_3, k_5) \text{ lub } (k_3, k_5, k_4).$$

Przykładem drogi długości 4 jest droga  $(k_2, k_3, k_5, k_4)$ .

□

Graf  $G$  nazywamy *grafem prostym*, jeśli

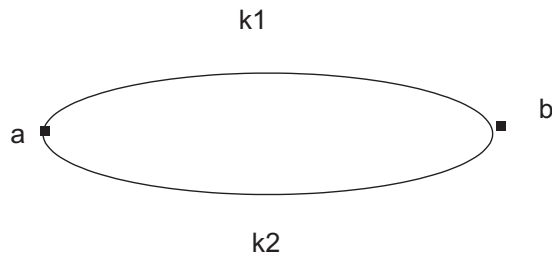
1. nie posiada pętli,
2.  $\gamma$  jest odwzorowaniem różnowartościowym.

**Zadanie 6.1.4** Podać przykład grafu bez pętli, który nie jest grafem prostym.

### Rozwiązanie

Rysunek 6.3 przedstawia przykład takiego grafu. Mamy tutaj

$$\gamma(k_1) = \gamma(k_2) = (a, b) \text{ i } k_1 \neq k_2.$$



Rysunek 6.3: rysunek grafu  $G$

□

I ogólnie, to że odwzorowanie  $\gamma$  jest różnowartościowe oznacza, że w grafie nie ma krawędzi *wielokrotnych*, czyli daną parę wierzchołków może łączyć co najwyżej jedna krawędź.

**Zadanie 6.1.5** Dane są dwa grafy  $G_i = (K(G_i), W(G_i), \gamma_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Powiemy, że grafy te są izomorficzne, co będziemy zapisywali  $G_1 \cong G_2$ , jeśli istnieje bijekcja

$$\mathbf{i}: W(G_1) \rightarrow W(G_2)$$

taka, że

$$\forall_{k_1 \in K(G_1)} \gamma_1(k_1) = (a, b) \Leftrightarrow \exists!_{k_2 \in K(G_2)} \gamma_2(k_2) = (\mathbf{i}(a), \mathbf{i}(b)). \quad (6.1)$$

Uzasadnić, że:

1. izomorfizm definiuje relację równoważności w zbiorze grafów,

2.

$$G_1 \cong G_2 \Rightarrow |W(G_1)| = |W(G_2)|,$$

3.

$$G_1 \cong G_2 \Rightarrow |K(G_1)| = |K(G_2)|,$$

4.

$$G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_1 \text{ jest prosty} \Leftrightarrow G_2 \text{ jest prosty}.$$

### Rozwiązanie

1. Ponieważ odwzorowanie tożsamościowe ma własność 6.1, relacja

$$G_1 \mathcal{R} G_2 \Leftrightarrow G_1 \cong G_2$$

jest relacją zwrotną. Jest symetryczna, gdyż odwzorowanie odwrotne  $\mathbf{i}^{-1}$  spełnia 6.1, o ile  $\mathbf{i}$  spełnia. Pokażemy, że relacja jest przechodnia. Załóżmy, że  $G_1 \mathcal{R} G_2$  i  $G_2 \mathcal{R} G_3$ . Istnieją wtedy bijekcje

$$\mathbf{i}_1: W(G_1) \rightarrow W(G_2),$$

$$\mathbf{i}_2: W(G_2) \rightarrow W(G_3)$$

takie, że dla krawędzi  $k_1 \in K(G_1)$

$$\gamma_1(k_1) = (a, b) \Leftrightarrow \exists!_{k_2 \in K(G_2)} \gamma_2(k_2) = (\mathbf{i}_1(a), \mathbf{i}_1(b)).$$

Jednocześnie dla  $k_2$  istnieje jedyna krawędź  $k_3 \in K(G_3)$ , że

$$\gamma_3(k_3) = (\mathbf{i}_2(\mathbf{i}_1(a)), \mathbf{i}_2(\mathbf{i}_1(b))).$$

Ale złożenie  $\mathbf{i} = \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_1: W(G_1) \rightarrow W(G_3)$  jest bijekcją i dla  $k_1$  mamy

$$\gamma_1(k_1) = (a, b) \Leftrightarrow \text{istnieje } k_3 \in K(G_3)$$

$$\gamma_3(k_3) = (\mathbf{i}(a), \mathbf{i}(b)),$$

co oznacza, że  $G_1 \mathcal{R} G_3$ .

2. Wynika z faktu, że istnienie bijekcji o własności 6.1 oznacza równoliczność zbiorów  $W(G_1)$  i  $W(G_2)$ .

3. Warunek 6.1 wyznacza równoliczność zbiorów  $K(G_1)$  i  $K(G_2)$ .
4. Niech  $G_1$  i  $G_2$  będą izomorficzne. Gdyby graf  $G_1$  miał pętlę, to dla pewnej krawędzi  $k_1 \in K(G_1)$  mielibyśmy  $\gamma_1(k_1) = (a, a)$ . Wtedy znalazłaby się krawędź  $k_2 \in K(G_2)$ , że  $\gamma_2(k_2) = (\mathbf{i}(a), \mathbf{i}(a))$ . Dlatego graf  $G_2$  również miałby pętlę i na odwrót. Podobne rozumowanie możemy powtórzyć w przypadku krawędzi wielokrotnych. Dowodzi to, że dla grafów izomorficznych albo oba są proste, albo tak nie jest.

□

**Zadanie 6.1.6** *Podać przykład dwóch izomorficznych różnych grafów (posiadających różne wykresy).*

### Rozwiązanie

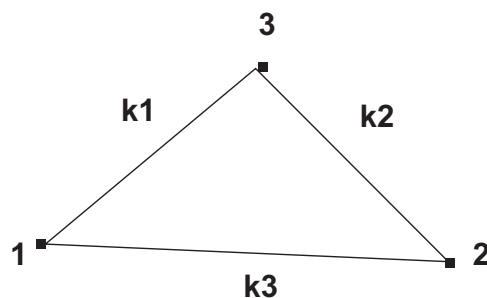
Weźmy dwa grafy jak na rysunkach 6.4 i 6.5. Zauważmy, że  $G_1 \cong G_2$ , bowiem

$$\mathbf{i}: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\},$$

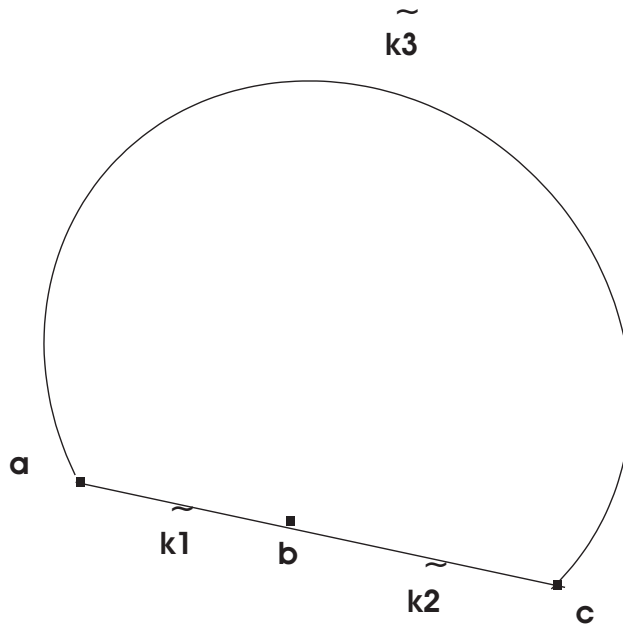
$$\mathbf{i}(1) = a, \mathbf{i}(2) = b, \mathbf{i}(3) = c.$$

Ponadto np. dla krawędzi  $k_2$  mamy

$$\gamma_1(k_2) = (2, 3), \text{ to } k_2 \rightarrow \tilde{k}_2 = (b = \mathbf{i}(2), c = \mathbf{i}(3)).$$



Rysunek 6.4: rysunek grafu  $G$

Rysunek 6.5: rysunek grafu  $G$ 

□

Każdą drogę złożoną z różnych krawędzi nazywamy *drogą prostą*. Jeśli dodatkowo jest zamknięta i posiada różne wierzchołki za wyjątkiem pierwszego i ostatniego, to nazwiemy ją *cyklem*. Graf, który nie zawiera cykli, nazywamy *grafem acyklicznym*.

**Zadanie 6.1.7** Czy droga zamknięta złożona z dwóch wierzchołków może być cyklem?

### Rozwiązanie

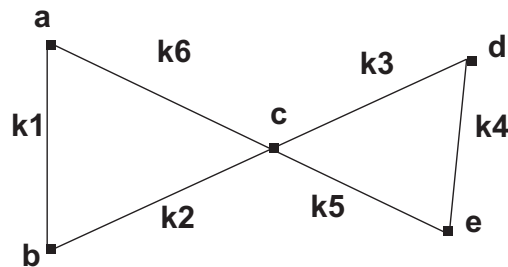
Weźmy graf  $G$  postaci:  $W(G) = \{a, b\}$ ,  $K(G) = \{k\}$ . Jediną drogą zamkniętą jest wtedy droga  $(a, b, a)$  albo  $(b, a, b)$ . Ponieważ droga taka nie jest prosta, więc nie może być cyklem.

□

**Zadanie 6.1.8** Podać przykład drogi prostej zamkniętej, która nie jest cyklem.

**Rozwiązanie**

Weźmy pod uwagę graf jak na rysunku 6.6.



Rysunek 6.6: rysunek grafu  $G$

Weźmy drogę wyznaczoną przez wierzchołki  $(a, b, c, d, e, c, a)$  i złożoną z krawędzi  $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$ . Jest to droga prosta i zamknięta. Mimo to nie jest cyklem (dlaczego?).

□

**Fakt 6.1.1** (*O cyklu*) Każda droga zamknięta długości co najmniej 3 o różnych wierzchołkach składa się z różnych krawędzi i jest cyklem.

□

**Zadanie 6.1.9** Uzasadnić, że dla każdej drogi grafu  $G$  następujące warunki są równoważne

1. droga posiada różne wierzchołki,
2. droga jest prosta i jako graf acykliczna.



**Rozwiązanie**

(1)  $\Rightarrow$  (2) Weźmy drogę długości  $n$  złożoną z krawędzi  $(k_1, \dots, k_n)$  o różnych wierzchołkach  $(w_1, w_2, \dots, w_{n+1})$ , czyli

$$\gamma(k_1) = (w_1, w_2), \dots, \gamma(k_n) = (w_n, w_{n+1}).$$

Gdyby dla pewnych  $1 \leq i < j \leq n$  krawędzie  $k_i$  oraz  $k_j$  były jednakowe, to

$$(w_i, w_{i+1}) = \gamma(k_i) = \gamma(k_j) = (w_j, w_{j+1}),$$

skąd

$$w_i = w_j \text{ lub } w_i = w_{j+1},$$

co na mocy założenia jest niemożliwe. Dlatego droga ta jest prosta. Definiuje ona nam nowy graf  $G_1$  (zwany też *podgrafem* grafu  $G$ ), dla którego

$$W(G_1) = \{w_1, \dots, w_{n+1}\}, \quad K(G_1) = \{k_1, \dots, k_n\}$$

z funkcją  $\gamma_1$  będącą restrykcją funkcji  $\gamma$  do zbioru  $K(G_1)$ . Z konstrukcji grafu  $G_1$  wynika, że nie może on mieć cykli (dlaczego?). Dlatego jest acykliczny.

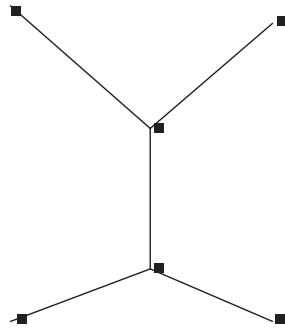
(2)  $\Rightarrow$  (1) Niech  $G_1$  będzie podgrafem acyklicznym grafu  $G$  będącym drogą prostą  $(k_1, \dots, k_n)$  o wierzchołkach  $(w_1, w_2, \dots, w_{n+1})$ . Gdyby  $w_i = w_j$  dla pewnych  $1 \leq i < j \leq n + 1$ , to spośród wszystkich takich par wierzchołków wybierzmy tę, dla której różnica  $j - i$  jest najmniejsza. Weźmy nową drogę  $(w_i, w_{i+1}, \dots, w_j)$  o krawędziach  $(k_i, \dots, k_{j-1})$ . Z założenia droga ta jest prosta i zamknięta. Ponadto za wyjątkiem wierzchołków  $w_i, w_j$  złożona jest z różnych wierzchołków. Dlatego jest cyklem. Przeczy to założeniu, że podgraf  $G_1$  jest acykliczny. Dlatego wierzchołki te są różne.

□

**Twierdzenie 6.1.1** (*I twierdzenie o grafie acyklicznym*) *Graf jest acykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera zamkniętej drogi prostej.*

□

**Zadanie 6.1.10** *Sprawdzić, czy w grafie danym jak na rysunku 6.7 każde dwa jego wierzchołki można połączyć drogą prostą. Czy graf ten jest acykliczny?*

Rysunek 6.7: rysunek grafu  $G$ **Rozwiązanie**

Z I twierdzenia o grafie acyklicznym wynika, że graf  $G$  z rysunku 6.7 jest acykliczny. Ponadto każde jego dwa wierzchołki łączy dokładnie jedna droga prosta. Poniższe twierdzenie opisuje sytuację ogólniejszą.

□

**Twierdzenie 6.1.2** (II twierdzenie o grafie acyklicznym) *W każdym grafie acyklicznym każde dwa wierzchołki łączy co najmniej jedna droga prosta.*

□

Dla  $w \in W(G)$  niech  $\deg(w)$  oznacza liczbę wszystkich niezdegenerowanych (czyli różnych od pętli) krawędzi, dla których jednym z końców jest wierzchołek  $w$  powiększoną o podwojoną liczbę pętli w tym wierzchołku. Liczbę tę będziemy nazywali *stopniem wierzchołka*. Dla  $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  niech

$$D_k(G) = |\{w \in W(G) : \deg(w) = k\}|.$$

Jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków  $\deg(w_1) = \deg(w_2)$ , to o grafie  $G$  powiemy, że jest *regularny*. Graf prosty o tej własności, że

$$\forall_{w_1, w_2 \in W(G)} \exists_{k \in K(G)} \gamma(k) = (w_1, w_2)$$

będziemy nazywali *grafem pełnym*. Graf pełny o  $n$  wierzchołkach oznaczymy przez  $K_n$ .

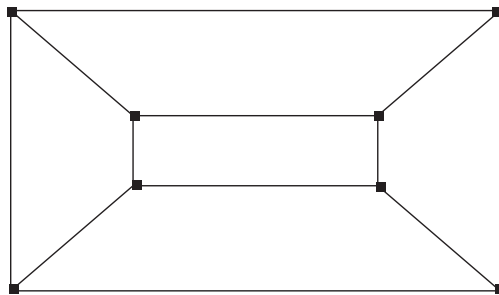
**Zadanie 6.1.11** *Uzasadnić, że każdy graf  $K_n$  jest regularny.*

**Rozwiązanie**

Z definicji grafu pełnego  $K_n$  wynika, że  $\deg(w) = n-1$  dla każdego wierzchołka  $w$ .

□

**Zadanie 6.1.12** *Sprawdzić, czy graf z rysunku 6.8 jest pełny.*



Rysunek 6.8: rysunek grafu  $G$

**Rozwiązanie**

Graf  $G$  z rysunku 6.8 nie jest grafem pełnym (dlaczego?). Z drugiej strony dla każdego wierzchołka  $w$  mamy  $\deg(w) = 3$ , co oznacza, że jest on regularny.

Zauważmy, że

$$\sum_{w \in W(G)} \deg(w) = 8 \cdot 3 = 24 = 2|K(G)|.$$

Ponadto

$$D_k(G) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k \neq 3; \\ 8, & \text{gdy } k = 3 \end{cases}$$

oraz

$$\sum_k k D_k(G) = 3 \cdot 8 = 24 = 2|K(G)|.$$

□

Poniższe twierdzenie tłumaczy, że tak jest dla dowolnego grafu.

**Twierdzenie 6.1.3** (*O "uściskach dłoni"*) Dla każdego grafu  $G$  zachodzą wzory

$$\sum_{w \in W(G)} \deg(w) = 2|K(G)|, \quad \sum_{k \geq 0} kD_k(G) = 2|K(G)|.$$

□

Jeśli w grafie  $G$  istnieje droga prosta zamknięta złożona ze wszystkich krawędzi, to graf taki nazywamy *grafem Eulera*, a tę drogę *cyklem Eulera*.

**Twierdzenie 6.1.4** (*I twierdzenie Eulera*) Jeżeli  $G$  jest grafem Eulera, to stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą.

□

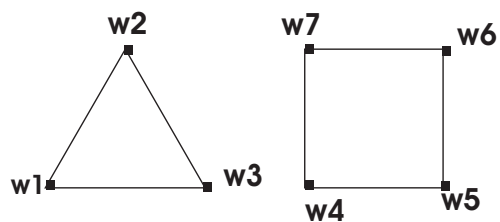
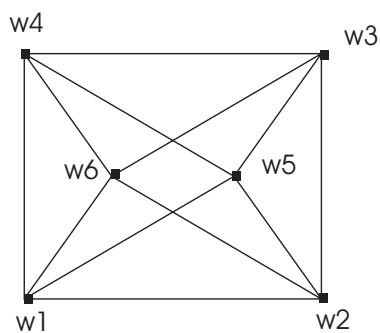
**Zadanie 6.1.13** Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne do I twierdzenia Eulera?

### Rozwiązanie

Przykład grafu z rysunku 6.9 pokazuje, że nie. Zauważmy, że graf z rysunku 6.9 może być traktowany jako suma mnogościowa dwóch podgrafów o rozłącznych zbiorach wierzchołków. Oczywiście stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą, a mimo to graf  $G$  nie jest grafem Eulera.

□

**Twierdzenie 6.1.5** (*II twierdzenie Eulera*) Każdy graf, w którym stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą jest sumą parami rozłącznych cykli. Jeśli dodatkowo każde dwa wierzchołki łączy co najmniej jedna droga (mówimy wtedy, że graf jest spójny), to jest on grafem Eulera.

Rysunek 6.9: rysunek grafu  $G$ Rysunek 6.10: rysunek grafu  $G$ 

□

**Zadanie 6.1.14** Czy graf z rysunku 6.10 jest grafem Eulera? Jeśli tak, to czy

można przedstawić go w postaci sumy rozłącznych cykli? Wyznaczyć cykl Eulera w tym grafie.

### Rozwiązanie

Ponieważ dla każdego  $w_i \in G$ ,  $\deg(w_i) = 4$  i graf jest spójny, z II twierdzenia Eulera  $G$  jest grafem Eulera. Rozłożymy najpierw graf na parami rozłączne cykle. Zauważmy, że

$$G = C_1 \cup C_2 \cup C_3,$$

gdzie

$$C_1 = (w_1, w_6) \rightarrow (w_6, w_3) \rightarrow (w_3, w_4) \rightarrow (w_4, w_1),$$

$$C_2 = (w_1, w_2) \rightarrow (w_2, w_3) \rightarrow (w_3, w_5) \rightarrow (w_5, w_1),$$

$$C_3 = (w_2, w_6) \rightarrow (w_6, w_4) \rightarrow (w_4, w_5) \rightarrow (w_5, w_2).$$

Znajdziemy teraz cykl Eulera w tym grafie. Należy wyraźnie podkreślić, że samo twierdzenie Eulera (a właściwie jego dowód) nie podaje zasady konstrukcji takiego cyklu, jedynie uzasadniając jego istnienie. Skorzystamy z pewnego dodatkowego faktu zwanego w literaturze *algorytmem Fleury'ego* (patrz np. [8]).

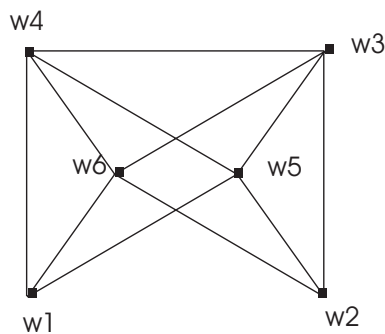
W wyniku pewnych czynności, które opiszemy poniżej, będziemy konstruowali ciąg kolejnych wierzchołków cyklu Eulera. Na wejściu algorytmu będziemy używali wierzchołka, który został skonstruowany na wyjściu algorytmu w kroku poprzednim. Na powyższym przykładzie pokażemy, że w wyniku wykonania skończonej ilości kroków algorytm trzeba będzie przerwać. Oznaczało to będzie, że konstrukcja cyklu Eulera będzie zakończona.

Sam algorytm polega na:

1. (wejście) W przypadku inicjacji algorytmu-wybraniu z grafu  $G$  dowolnego wierzchołka, w przypadku jego przebiegu na wzięciu wierzchołka wybranego na wyjściu algorytmu.
2. Mogą zdarzyć się trzy przypadki:
  - (a) z wybranego wierzchołka  $w$  nie wychodzi żadna krawędź. Przerwywamy algorytm.
  - (b) z wybranego wierzchołka  $w$  wychodzi dokładnie jedna krawędź  $k$  taka, że  $\gamma(k) = (w, v)$ . Wtedy bierzemy nowy graf, który powstaje z dotychczasowego wskutek usunięcia z niego krawędzi  $k$  i wierzchołka  $w$ . Wtedy na wyjściu mamy wierzchołek  $v$  i nowy graf.

- (c) z wybranego wierzchołka wychodzą co najmniej dwie krawędzie. Wśród nich wybieramy jedną krawędź  $k$ , taką że po jej usunięciu z grafu powstanie graf spójny. Na wyjściu otrzymamy nowo powstały graf i wierzchołek  $v$  taki, że  $\gamma(k) = (w, v)$ .

Pokażemy teraz, jak działa algorytm Fleury'ego na przykładzie grafu z rysunku 6.10. Przypuśćmy, że wybraliśmy wierzchołek  $w_1$ . Ponieważ wychodzą z niego 4 krawędzie, musimy zwrócić uwagę, aby wybrać właściwą. W naszym przypadku każda jest dobra, bowiem usunięcie dowolnej z nich daje dalej graf spójny. Przyjmijmy, że usuwamy  $(w_1, w_2)$ . Dostaniemy wtedy graf



Rysunek 6.11: rysunek grafu  $G_1$

oraz początek cyklu Eulera  $(w_1, w_2) \rightarrow$ .

Z wierzchołka  $w_2$  wychodzą trzy krawędzie i również usunięcie dowolnej z nich z otrzymanego grafu  $G_1$  da dalej graf spójny. Przyjmijmy, że usuwamy krawędź  $(w_2, w_3)$ . Wtedy graf wynikowy  $G_2$  będzie wyglądał jak narysunku 6.12

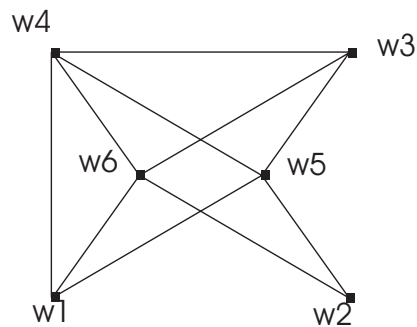
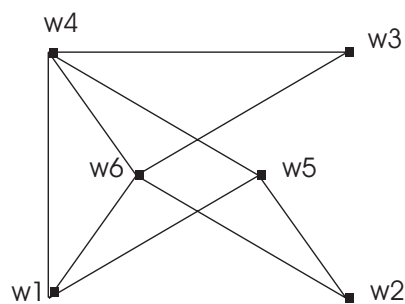
Cykl Eulera wygląda teraz

$$(w_1, w_2) \rightarrow (w_2, w_3) \rightarrow$$

Z wybranego wierzchołka  $w_3$  wychodzą 3 krawędzie. Decydujemy się na wybór  $(w_3, w_5)$ . Dostaniemy kolejne uzupełnienie do cyklu Eulera w postaci

$$(w_1, w_2) \rightarrow (w_2, w_3) \rightarrow (w_3, w_5) \rightarrow .$$

Natomiast graf  $G_3$  będzie wyglądał jak na rysunku 6.13.

Rysunek 6.12: rysunek grafu  $G_2$ Rysunek 6.13: rysunek grafu  $G_3$ 

Z wierzchołka  $w_5$  wychodzą też 3 krawędzie. Stosując zasady algorytmu możemy wybrać  $(w_5, w_4)$ . Wtedy nasz cykl będzie miał postać

$$(w_1, w_2) \rightarrow (w_2, w_3) \rightarrow (w_3, w_5) \rightarrow (w_5, w_4) \rightarrow .$$

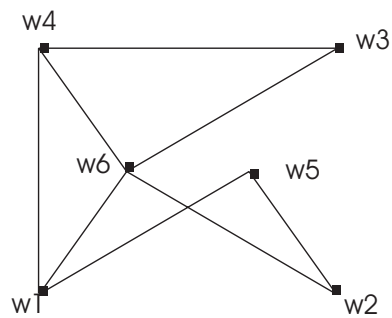
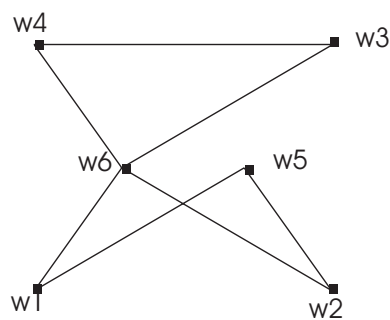
W efekcie z grafu  $G_3$  otrzymamy graf  $G_4$  przedstawiony na rys. 6.14.

Dla wierzchołka  $w_4$  mamy podobną sytuację jak w przypadku  $w_5$ . Tym razem wybierzemy krawędź  $(w_4, w_1)$ . W efekcie dostaniemy ciąg dalszy cyklu Eulera

$$(w_1, w_2) \rightarrow (w_2, w_3) \rightarrow (w_3, w_5) \rightarrow (w_5, w_4) \rightarrow (w_4, w_1) \rightarrow$$

oraz graf  $G_5$  przedstawiony na rysunku 6.15



Rysunek 6.14: rysunek grafu  $G_4$ Rysunek 6.15: rysunek grafu  $G_5$ 

W przypadku otrzymanego wierzchołka  $w_1$  wybierzemy krawędź  $(w_1, w_6)$ . Da to nam odpowiednio

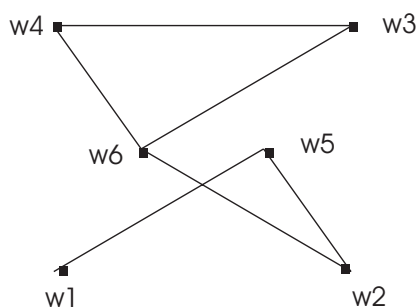
$$(w_1, w_2) \rightarrow (w_2, w_3) \rightarrow (w_3, w_5) \rightarrow (w_5, w_4) \rightarrow (w_4, w_1) \rightarrow (w_1, w_6) \rightarrow$$

oraz graf  $G_6$  przedstawiony na ry. 6.16.

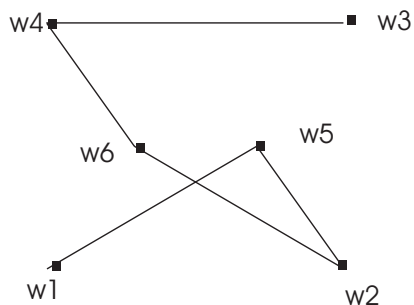
Teraz możemy jedynie usunąć krawędź  $(w_6, w_3)$ , bowiem usunięcie krawędzi  $(w_6, w_2)$  spowoduje, że graf wynikowy przestanie być spójny.

W wyniku tego zabiegu otrzymamy

$$(w_1, w_2) \rightarrow (w_2, w_3) \rightarrow (w_3, w_5) \rightarrow (w_5, w_4) \rightarrow (w_4, w_1) \rightarrow (w_1, w_6) \rightarrow (w_6, w_3) \rightarrow$$

Rysunek 6.16: rysunek grafu  $G_6$ 

Natomiast graf wynikowy  $G_7$  będzie miał postać jak na rysunku 6.17.

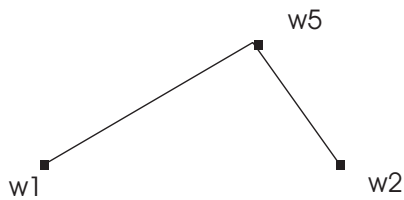
Rysunek 6.17: rysunek grafu  $G_7$ 

Sytuacja, jaka powstała w wyniku dotychczasowych czynności, dotyczy przypadku kiedy z kolejnego wierzchołka wychodzi dokładnie jedna krawędź. Zgodnie z zasadą algorytmu wykonamy teraz kolejno:

1. usuniemy krawędź  $(w_3, w_4)$  i wierzchołek  $w_3$ , dostając graf  $G_8$ ,
2. z grafu  $G_8$  usuniemy krawędź  $(w_4, w_6)$  i wierzchołek  $w_4$ , otrzymując graf  $G_9$ ,

3. z grafu  $G_9$  usuniemy krawędź  $(w_6, w_2)$  i wierzchołek  $w_6$ , otrzymując graf  $G_{10}$ .

Rysunek 6.18 przedstawia wykres grafu  $G_{10}$



Rysunek 6.18: rysunek grafu  $G_{10}$

Wykonanie dwóch ostatnich kroków da poszukiwany cykl Eulera

$$(w_1, w_2) \rightarrow (w_2, w_3) \rightarrow (w_3, w_5) \rightarrow (w_5, w_4) \rightarrow (w_4, w_1) \rightarrow (w_1, w_6) \rightarrow$$

$$(w_6, w_3) \rightarrow (w_3, w_4) \rightarrow (w_4, w_6) \rightarrow (w_6, w_2) \rightarrow (w_2, w_5) \rightarrow (w_5, w_1).$$

□

Każdą drogę w grafie  $G$ , która przechodzi tylko raz przez każdy wierzchołek grafu, będziemy nazywali *drogą Hamiltona*. Jeśli dodatkowo droga ta jest zamknięta, to nazwiemy ją *cyklem Hamiltona*. Graf posiadający cykl Hamiltona nazwiemy *grafem Hamiltona*.

**Zadanie 6.1.15** Pokazać, że każda droga Hamiltona jest prosta, ale nie na odwrót.

**Rozwiązanie**

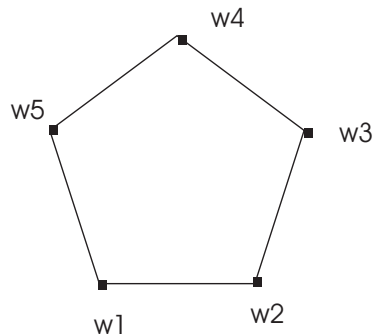
Ponieważ droga prosta nie musi przechodzić przez wszystkie wierzchołki, może nie być drogą Hamiltona. Weźmy teraz drogę Hamiltona w grafie  $G$  postaci  $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$ . Oznacza to, że jeśli  $W(G) = \{w_1, \dots, w_n\}$ , to  $\gamma(k_j) = (w_j, w_{j+1})$  dla  $j = 1, \dots, n - 1$ . Gdyby dla pewnych krawędzi  $k_r, k_s$ ,  $r < s$ ,  $\gamma(k_r) = \gamma(k_s)$ , to przez jeden z wierzchołków ze zbioru  $\{w_r, w_{r+1}, w_s, w_{s+1}\}$  droga ta przechodziłaby co najmniej dwa razy. Dlatego w drodze Hamiltona krawędzie nie są wielokrotne, czyli jest ona prosta.

□

**Zadanie 6.1.16** *Czy każdy graf Hamiltona jest grafem Eulera?*

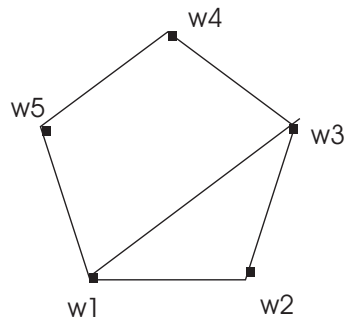
### Rozwiązanie

Nie. W tym celu wystarczy wziąć graf Hamiltona, który po modyfikacji dalej jest grafem Hamiltona, ale nie jest grafem Eulera.



Rysunek 6.19: graf Eulera i Hamiltona

□

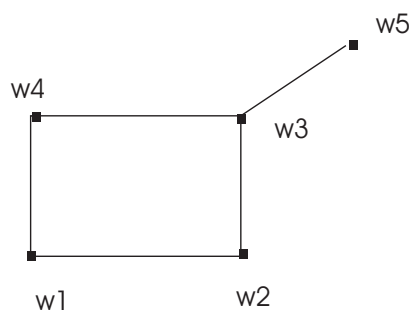


Rysunek 6.20: graf Hamiltona

**Zadanie 6.1.17** Niech  $G$  będzie grafem Hamiltona takim, że  $|W(G)| = n$ . Oszacować liczbę  $|K(G)|$ .

### Rozwiązanie

Wprost z definicji grafu Hamiltona wynika, że  $|K(G)| \geq n$  oraz  $n \geq 3$ . Przy okazji zauważmy, że jest to tylko warunek dostateczny, co pokazuje przykład grafu z rysunku 6.21. Mamy tutaj:  $|W(G)| = 5$ ,  $|K(G)| = 5$ , ale przez wierzchołek  $w_3$  każda zamknięta droga Hamiltona przechodzi dwa razy.

Rysunek 6.21: graf  $G$

□

**Twierdzenie 6.1.6** (*Diraca*) Niech  $G$  będzie grafem prostym oraz  $|W(G)| = n \geq 3$ . Jeśli dla każdego wierzchołka  $w \in W(G)$  zachodzi nierówność  $\deg(w) \geq \frac{n}{2}$ , to  $G$  jest grafem Hamiltona.

□

**Zadanie 6.1.18** Niech  $G$  będzie grafem prostym i  $|W(G)| = n \geq 3$ . Pokazać, że jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków  $w_1, w_2$ , które nie są połączone krawędzią, zachodzi nierówność

$$\deg(w_1) + \deg(w_2) \geq n,$$

to  $G$  jest grafem Hamiltona. Jest to tzw. twierdzenie Oreya (patrz np. [8]).

### Rozwiązanie

Dowód opiera się na rozumowaniu zastosowanym przy dowodzie twierdzenia Diraca (patrz np. [8]). Przypuścimy, że graf  $G$  ma własności podane w treści zadania i nie jest grafem Hamiltona. Zdefiniujemy rodzinę  $\mathcal{G}$  złożoną z tych wszystkich grafów  $\tilde{G}$ , że:

1.

$$|W(\tilde{G})| = |W(G)| = n,$$

2.

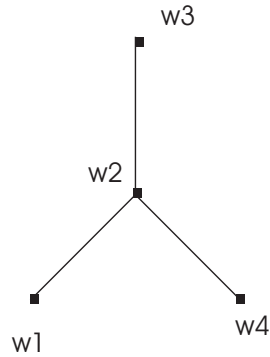
$$|K(\tilde{G})| \geq |K(G)|,$$

3.

$$\deg(w_1) + \deg(w_2) \geq n$$

dla dowolnych wierzchołków nie połączonych krawędzią,

4.  $\tilde{G}$  nie jest grafem Hamiltona.

Rysunek 6.22: graf  $G$ 

Z założenia rodzina  $\mathcal{G}$  jest niepusta (zawiera  $G$ ) oraz skończona. Istnieje więc graf  $G_o \in \mathcal{G}$  taki, że

$$|K(G_o)| = \max\{|K(\tilde{G})|: \tilde{G} \in \mathcal{G}\}.$$

Z twierdzenia Diraca wynika, że graf  $G_o$  można tak zmodyfikować poprzez dodanie odpowiednich krawędzi, że otrzymany graf  $G_o^*$  będzie miał własności:  $|W(G_o)| = |W(G_o^*)|$  oraz  $|K(G_o^*)| > |K(G_o)|$ . W takim razie  $G_o^* \notin \mathcal{G}$  i jako taki jest grafem Hamiltona.

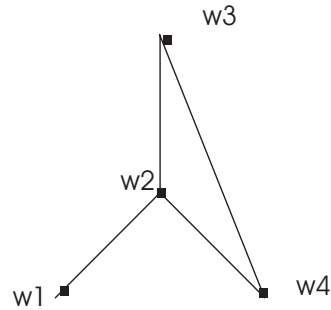
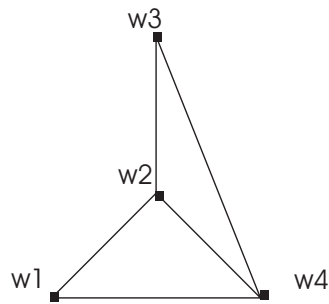
Rozważmy tę sytuację na prostym przykładzie. Niech graf wyjściowy  $G$  wygląda jak na rysunku 6.22

Oczywiście  $G$  nie jest grafem Hamiltona. Odpowiadające mu grafy  $G_o$  i  $G_o^*$  mogą wyglądać tak jak na rysunkach 6.23 i 6.24.

Zauważmy, że  $G_o^*$  jest grafem Hamiltona z cyklem

$$(w_1, w_2) \rightarrow (w_2, w_3) \rightarrow (w_3, w_4) \rightarrow (w_4, w_1),$$

który dla grafu  $G_o$  jest tylko drogą Hamiltona.

Rysunek 6.23: graf  $G_o$ Rysunek 6.24: graf  $G_o^*$ 

Podobnie mamy w sytuacji ogólnej. W grafie  $G_o$  można wskazać drogę Hamiltona, powiedzmy

$$(w_1, w_2) \rightarrow (w_2, w_3) \rightarrow \dots \rightarrow (w_{n-1}, w_n),$$

gdzie przez wierzchołki (i tylko te wierzchołki)  $w_1, w_n$  nie przechodzi żadna krawędź.

Definiujemy dwa zbiory  $A, B$  złożone z tych wierzchołków, które są połączone krawędziami odpowiednio z  $w_1$  i  $w_n$ . Gdyby  $A \cap B = \emptyset$ , to ponieważ  $|A \cup B| = |A| + |B|$  i  $|A| = \deg(w_1)$ ,  $|B| = \deg(w_n)$  mielibyśmy z założenia

$$|A \cup B| = |A| + |B| \geq n.$$

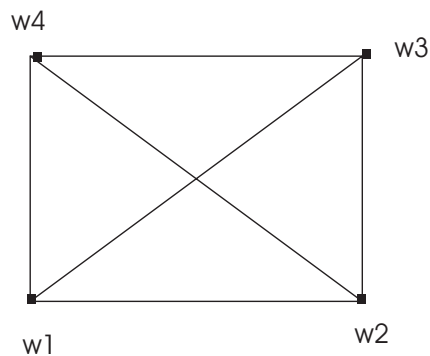


Z drugiej strony zbiór  $A \cup B$  jest co najwyżej  $n - 1$ -elementowy. Oznacza to, że istnieje co najmniej jeden wierzchołek  $w_{i_0}$ , który połączony jest krawędzią z wierzchołkiem  $w_1$  oraz  $w_n$ . Pozwala to zdefiniować w grafie  $G_0$  cykl Hamiltona (dlaczego?). Uzyskana sprzeczność dowodzi, że  $G$  jest grafem Hamiltona.

□

O grafie  $G$  powiemy, że jest *planarny*, jeśli jego wykres na płaszczyźnie wyróżnia się tym, że żadne jego krawędzie nie przecinają się. Wykres grafu planarnego nazywa się także jego *reprezentacją planarną*.

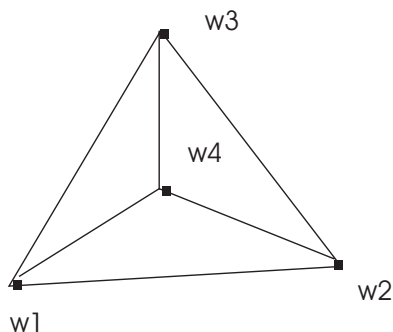
**Zadanie 6.1.19** Pokazać, że graf pełny  $K_4$  z rysunku 6.25 ma reprezentację planarną.

Rysunek 6.25: graf  $K_4$ 

### Rozwiązanie

Zauważmy, że reprezentacja planarna grafu  $K_4$  może wyglądać jak na rysunku 6.26.

□

Rysunek 6.26: reprezentacja planarna grafu  $K_4$ 

**Twierdzenie 6.1.7** (I wzór Eulera dla grafu planarnego) Niech  $r$  oznacza liczbę parami rozłącznych podzbiorów płaszczyzny (regionów), które nie należą do reprezentacji planarnej grafu  $G$ .

Wtedy

$$r = |K(G)| - |W(G)| + 2.$$

□

**Twierdzenie 6.1.8** (II wzór Eulera dla grafu planarnego) Dla każdego grafu planarnego  $G$  zachodzi nierówność

$$|K(G)| \leq 3|W(G)| - 6.$$

□

**Zadanie 6.1.20** Sprawdzić, czy graf pełny  $K_6$  jest planarny.

### Rozwiązanie

Dla grafu  $K_6$  mamy:  $|K(G)| = 15$ ,  $|W(G)| = 6$ . Ponieważ

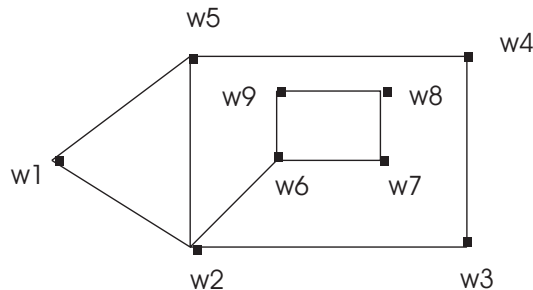
$$3|W(G)| - 6 = 12 < |K(G)| = 15,$$

na mocy II wzoru Eulera graf  $K_6$  nie może być grafem planarnym.

□

Przez *stopień regionu*  $R$  grafu planarnego  $G$  będziemy rozumieli liczbę krawędzi, na jakie natrafimy, obchodząc ten region wokół wzdłuż jego brzegu. Oznaczmy ją przez  $\deg(R)$ .

**Zadanie 6.1.21** Niech dany będzie graf jak na rysunku 6.27. Wyznaczyć jego regiony i podać ich stopnie.

Rysunek 6.27: graf  $G$ 

### Rozwiązanie

Możemy tutaj wyróżnić cztery regiony:  $R_1$  ograniczony krawędziami  $(w_1, w_2)$ ,  $(w_2, w_5)$ ,  $(w_5, w_1)$ ,  $R_2$  wyznaczony przez krawędzie  $(w_2, w_6)$ ,  $(w_6, w_7)$ ,  $(w_7, w_8)$ ,  $(w_8, w_9)$ ,  $(w_9, w_6)$  oraz przez  $(w_2, w_3)$ ,  $(w_3, w_4)$ ,  $(w_4, w_5)$ ,  $(w_5, w_2)$ ,  $R_3$  dany przez  $(w_6, w_7)$ ,  $(w_7, w_8)$ ,  $(w_8, w_9)$ ,  $(w_9, w_6)$  oraz region  $R_4$  ograniczony krawędziami  $(w_1, w_2)$ ,  $(w_2, w_3)$ ,  $(w_3, w_4)$ ,  $(w_4, w_5)$ ,  $(w_5, w_1)$ .

Ponadto mamy:

$$\deg(R_1) = 3, \quad \deg(R_2) = 10 \text{ (jedna krawędź musi być liczona dwukrotnie!)},$$

$$\deg(R_3) = 4, \quad \deg(R_4) = 5.$$

Na koniec zauważmy, że

$$\deg(R_1) + \deg(R_2) + \deg(R_3) + \deg(R_4) = 22 = 2|K(G)|.$$

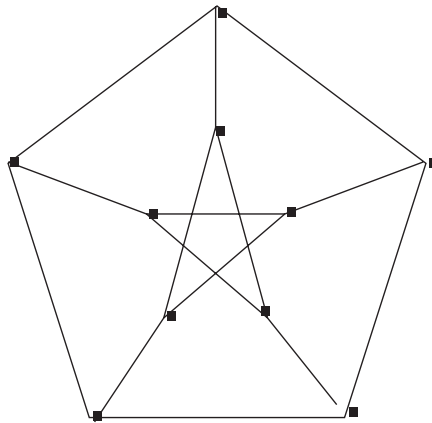
□

**Twierdzenie 6.1.9** (Eulera o stopniu regionu) *W każdym grafie spójnym*

$$\sum_i \deg(R_i) = 2|K(G)|.$$

□

**Zadanie 6.1.22** *Przez graf Petersena rozumiemy graf, który podany jest na rysunku 6.28. Sprawdzić, czy graf ten ma swoją reprezentację planarną.*



Rysunek 6.28: graf Petersena

### Rozwiązanie

Przypuśćmy, że graf Petersena ma reprezentację planarną. Ponieważ  $|W(G)| = 10$ ,  $|K(G)| = 15$ , to z I wzoru Eulera liczba regionów takiego grafu wynosi  $r = 15 - 10 + 2 = 7$ . Zauważmy, że dla każdego regionu  $R_i$

$$\deg(R_i) \geq 5 \text{ (dlaczego?)}.$$

Z twierdzenia Eulera o stopniu regionu wynika, że

$$\sum \deg(R_i) \geq 7 \cdot 5 - 35 > 2|K(G)| = 2 \cdot 15 = 30.$$

Dlatego graf Petersena nie jest grafem planarnym.

□

Powiemy, że graf  $G$  jest *grafem dwudzielnym*, jeżeli

$$W(G) = W_1 \cup W_2, \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset,$$

$$\forall k \in K(G) \exists w_i \in W_i, \quad i=1,2 \quad \gamma(k) = (w_1, w_2).$$

Zatem w przypadku grafu dwudzielnego zbiór jego wierzchołków jest skategoryzowany i każda krawędź takiego grafu łączy wierzchołki obu kategorii. Jeśli dodatkowo każde dwa wierzchołki połączone są krawędzią, to graf taki nazywamy *pełnym grafem dwudzielnym* i oznaczamy go przez  $K_{m,n}$ , gdzie  $m = |W_1|$ ,  $n = |W_2|$ . Jasne jest, że  $K_{m,n} \cong K_{n,m}$ .

**Twierdzenie 6.1.10** (*Eulera o grafie planarnym dwudzielnym*) *Jeśli  $G$  jest planarnym grafem dwudzielnym, to*

$$|K(G)| \leq 2|W(G)| - 4.$$

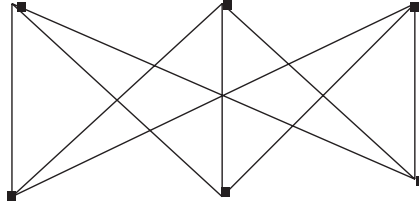
□

**Zadanie 6.1.23** *Problem podłączenia mediów można opisać grafem  $K_{3,3}$  przedstawionym na rysunku 6.29. Czy graf ten ma realizację planarną?*

### Rozwiązanie

Gdyby taka realizacja istniała, to spełniona byłaby nierówność podana w powyższym twierdzeniu Eulera. Tymczasem dla grafu  $K_{3,3}$  mamy:  $W(G) = 6$ ,  $K(G) = 9$ . Z tego powodu graf ten nie jest grafem planarnym.

□

Rysunek 6.29: graf dwudzielny  $G$ 

**Zadanie 6.1.24** *Uzasadnić, że problem kojarzenia par (patrz [6]) można opisać za pomocą grafu dwudzielnego.*

### Rozwiązanie

W problemie kojarzenia par mowa jest o dwóch populacjach: kobiet i mężczyzn. Wiedząc, że każda kobieta zna pewien niepusty podzbiór zbioru mężczyzn, należy opisać sytuację, która umożliwi skojarzenie różnych par.

Definiujemy graf  $G$ , dla którego

1.

$$W(G) = K \cup M, \quad K - \text{zbiór kobiet, } M - \text{zbiór mężczyzn,}$$

2.

$$e \in K(G) \Leftrightarrow \exists_{(k,m) \in K \times M} \gamma(e) = (k, m), \text{ o ile } k \text{ zna } m.$$

Zauważmy, że tak zdefiniowany graf jest grafem dwudzielnym, chociaż niekoniecznie pełnym. Problem kojarzenia par sprowadza się teraz do pytania:

kiedy z grafu  $G$  można wybrać podgraf  $H$ , dla którego

$$W(H) = W(G)$$

oraz

$$K(H) = \{e \in K(G) : \forall_{k \in K} \exists_{m \in M}! \gamma(e) = (k, m)\}.$$

Dalej tak powstały graf  $H$ , o ile istnieje, będziemy nazywali *grafem skojarzonym*. Zauważmy, że jeśli  $G$  ma graf skojarzony  $H$ , to (dlaczego?)

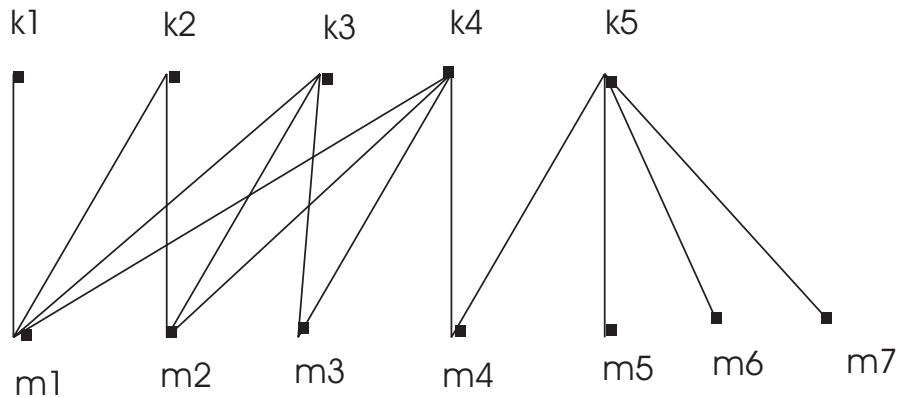
$$|K| \leq |M| \text{ oraz}$$

$$\forall A \subset K \quad |A| \leq |S(A)|,$$

gdzie

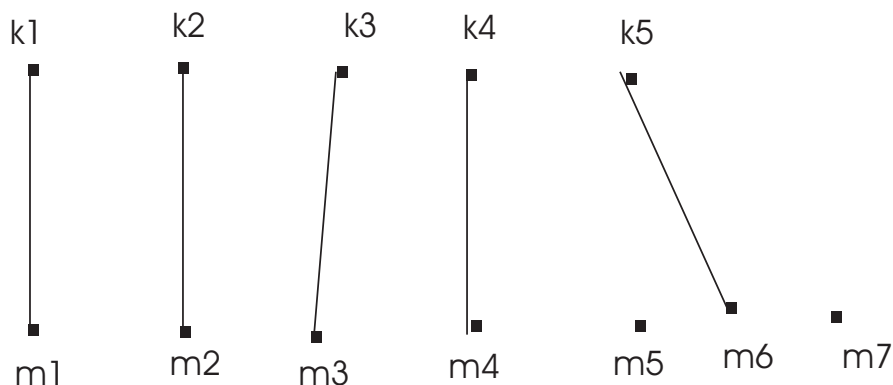
$$m \in S(A) \subset M \Leftrightarrow \exists k \in A: k \text{ zna } m.$$

Prześledźmy tę sytuację na przykładzie, biorąc graf  $G$  jak na rysunku 6.30, który opisuje wszystkie możliwe skojarzenia pomiędzy zbiorem kobiet  $K = \{k_1, \dots, k_5\}$  i zbiorem mężczyzn  $M = \{m_1, \dots, m_7\}$ .



Rysunek 6.30: graf dwudzielny  $G$

Ponieważ  $k_1$  zna tylko  $m_1$ , krawędzie:  $(k_2, m_1)$ ,  $(k_3, m_1)$ ,  $(k_4, m_1)$  należy usunąć z grafu  $G$ . W powstałym grafie z podobnej przyczyny należy usunąć  $(k_3, m_2)$  i  $(k_4, m_2)$ , a następnie  $(k_4, m_3)$ ,  $(k_5, m_3)$ . Aby z otrzymanego grafu stworzyć graf skojarzenia, spośród trzech krawędzi:  $(k_5, m_5)$ ,  $(k_5, m_6)$ ,  $(k_5, m_7)$  tylko jedną należy zachować. W efekcie tych czynności graf skojarzenia  $H$  może wyglądać następująco

Rysunek 6.31: graf skojarzony  $H$ 

□

**Twierdzenie 6.1.11** (*Halla o grafie skojarzonym*) *Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia podgrafu skojarzonego  $H$  dla grafu dwudzielnego  $G$  takiego, że  $W(G) = A \cup B$  jest, aby*

$$|A| \leq |B| \text{ i } \forall_{X \subset A} |X| \leq |S(X)|.$$

□

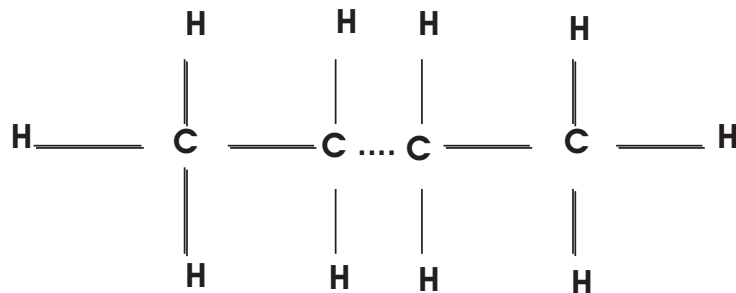
Jeśli  $G$  jest grafem acyklicznym i spójnym, to będziemy nazywali go *drzewem* i oznaczali przez  $T$ . Wtedy każdy  $w \in W(T)$  taki, że  $\deg(w) = 1$  będziemy nazywali *liściem* tego drzewa.

**Zadanie 6.1.25** *Weźmy cząsteczkę węglowodoru  $C_nH_{2n+2}$ ,  $n \geq 1$ . Na podstawie graficznej reprezentacji tej cząsteczki skonstruować odpowiadający jej model w postaci grafu. Uzasadnić, że graf ten jest drzewem  $T_n$ . Wyznaczyć  $K(T_n)$  i  $W(T_n)$ .*

### Rozwiązanie

Z chemii organicznej wiadomo, że cząsteczka  $C_nH_{2n+2}$  ma następującą swoją reprezentację graficzną



Rysunek 6.32: reprezentacja graficzna  $C_nH_{2n+2}$ 

Na tej podstawie graf  $T_n$  może wyglądać tak jak na rysunku 6.33. Ponieważ graf ten jest spójny i nie posiada cyklu, jest drzewem. Ponadto  $T_n$  jest grafem prostym. Wprost z rysunku tego grafu widzimy, że  $|W(T_n)| = n + 2n + 2 = 3n + 2$ . Z twierdzenia o "uścisku dłoni" wynika, że  $2|K(T_n)| = \sum \deg(w) + 2$ . Ponieważ spośród wierzchołków grafu  $T_n$ , dla  $n$  z nich  $\deg(w) = 4$  oraz dla  $2n + 2$ ,  $\deg(w) = 1$ , dostaniemy

$$2|K(T_n)| = 4n + 2n + 2 = 6n + 2 \Rightarrow |K(T_n)| = 3n + 1.$$

□

**Twierdzenie 6.1.12** (O identyfikacji drzewa) *Każdy graf prosty  $G$  jest drzewem dokładnie wtedy, gdy  $K(G) = W(G) - 1$  oraz jest spójny.*

□

**Zadanie 6.1.26** *Narysować drzewo reprezentujące cząsteczkę butanu  $C_4H_{10}$ . Narysować to drzewo z punktu widzenia wybranego liścia.*

Rysunek 6.33: drzewo  $T_n$ **Rozwiązanie**

Weźmy najpierw drzewo  $T_2$  butanu jak na rysunku 6.34

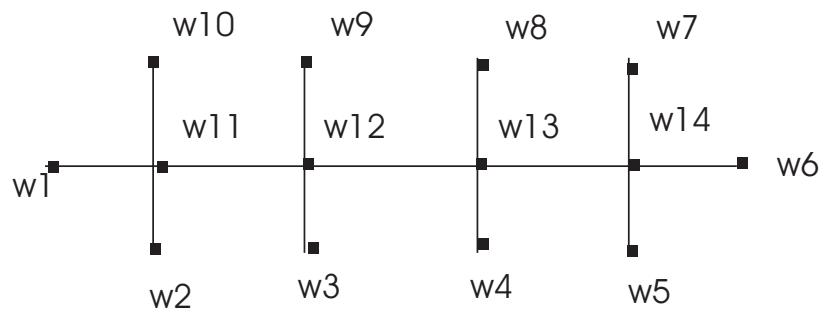
Narysujemy teraz ten sam graf, ale z punktu widzenia jego liścia. Tak wybrany liść w teorii drzew nazywamy *korzeniem*. Odpowiedni wykres grafu przedstawiamy na rysunku 6.35.

□

Powiemy, że  $T$  jest *drzewem spinającym* grafu  $G$ , jeśli  $|W(T)| = |W(G)|$  oraz  $T$  jest podgrafem  $G$ .

**Twierdzenie 6.1.13** (patrz np. [8]) *Każdy graf spójny ma drzewo spinające.*

□



Rysunek 6.34: drzewo butanu

**Zadanie 6.1.27** Wyznaczyć wszystkie drzewa spinające grafu  $K_3$ .

### Rozwiązanie

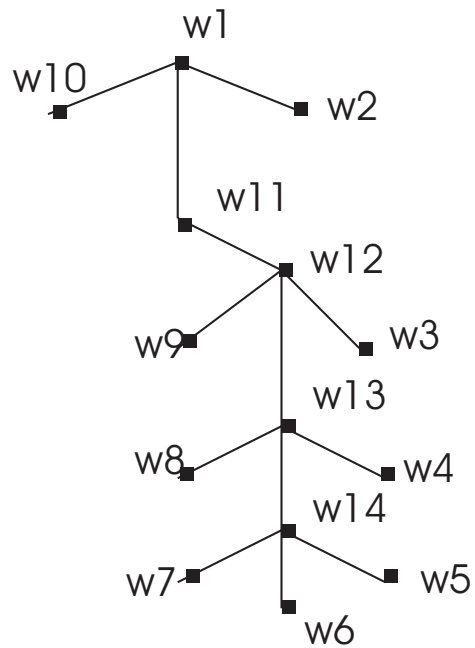
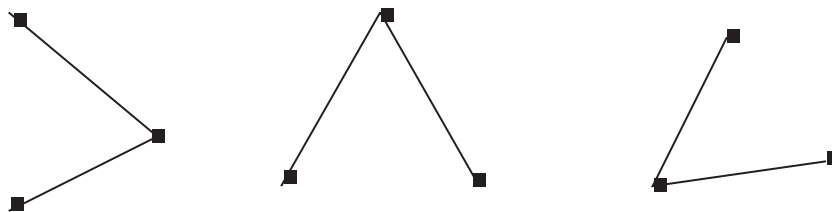
Oczywiście dostaniemy 3 takie drzewa przedstawione na rysunku 6.36.

Można pokazać (tw. Cayle'a, patrz np. [8]), że dla grafu pełnego  $K_n$  liczba wszystkich drzew spinających wynosi  $n^{n-2}$ .

□

**Zadanie 6.1.28** Niech  $G$  będzie grafem spójnym, w którym każdej krawędzi  $k \in K(G)$  przyporządkowaliśmy liczbę naturalną  $w(k)$  zwaną wagą krawędzi  $k$ . Z grafu  $G$  wybrać takie drzewo spinające  $T$ , że  $\sum_{k \in K(T)} w(k) = \min$ .

### Rozwiązanie

Rysunek 6.35: drzewo butanu z korzeniem  $w_1$ Rysunek 6.36: drzewa spinające grafu  $K_3$ 

Oznaczmy przez  $\mathcal{T}$  zbiór wszystkich drzew spinających graf  $G$ . Z twierdzenia o istnieniu drzewa spinającego wynika, że zbiór ten jest niepusty. Oczywiście jest

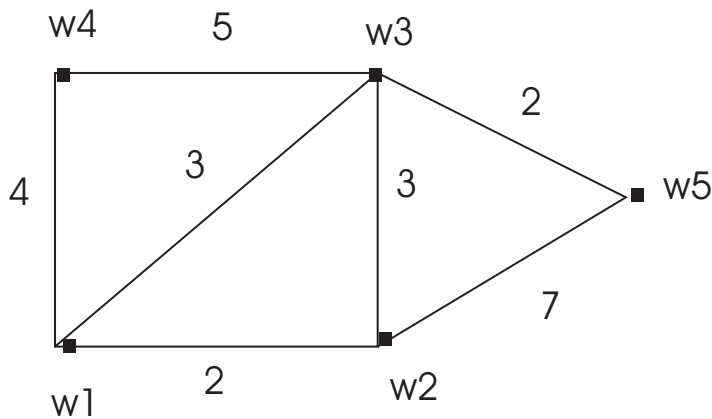
też skończony. Weźmy zbiór

$$W = \left\{ \sum_{k \in K(T)} w(k) : T \in \mathcal{T} \right\}.$$

Wtedy  $W$  jest niepustym i skończonym podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Istnieje zatem drzewo spinające  $T_o \in \mathcal{T}$ , że

$$w_o = \min W = \sum_{k \in K(T_o)} w(k).$$

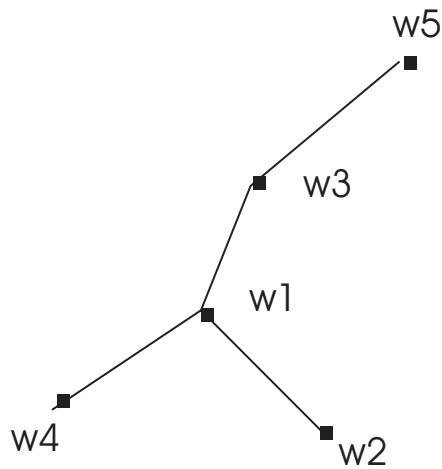
Wybór takiego drzewa przeprowadzimy metodą *algorytmu Kruskala* (patrz np. [8]). W tym celu weźmy graf  $G$  z wagami jak na rysunku 6.37.



Rysunek 6.37: graf z wagami

Zaczynamy od wyboru krawędzi o najmniejszej wadze. Jeśli takich krawędzi jest więcej aniżeli jedna, wybieramy dowolną z nich. Pozostałe wykreślamy z grafu. W naszym przypadku mamy dwie takie krawędzie:  $(w_1, w_2)$  i  $(w_3, w_5)$ . Wybierzemy  $(w_3, w_5)$ . W kolejnym kroku spośród krawędzi pozostałych wybieramy ponownie krawędź o najmniejszej wadze, dbając o to, aby nie zamykała ona cyklu powstałego z wcześniej wybranych krawędzi. Postępujemy tak długo, aż wybierzemy podgraf będący drzewem.

Wróćmy do naszego grafu  $G$ . Po wyborze  $(w_3, w_5)$  bierzemy teraz  $(w_3, w_1)$ . W takim razie krawędź  $(w_2, w_3)$  zostaje wykreślona z grafu. Kolejną wybraną krawędzią będzie  $(w_1, w_4)$ . Wtedy nie możemy wybrać krawędzi  $(w_4, w_3)$ . Pozostaje do wyboru  $(w_2, w_5)$ . Ponieważ wyczerpaliśmy zbiór wszystkich wierzchołków grafu  $G$ , proces wyboru zakończył się. Otrzymaliśmy w ten sposób drzewo spinające o minimalnym ciężarze  $w(T) = 2 + 3 + 4 + 2 = 11$ .



Rysunek 6.38: drzewo spinające o minimalnym ciężarze

□

Drzewo z wyróżnionym korzeniem nazywamy *drzewem binarnym*, jeśli każdy wierzchołek  $w$  nie będący ani korzeniem, ani liściem, czyli  $\deg(w) > 1$ , ma co najwyżej dwa liście. W literaturze takie wierzchołki nazywamy *węzłami* drzewa.

**Zadanie 6.1.29** *Podać przykład drzewa binarnego. Zaproponować sposób uporządkowania takiego drzewa, wykorzystując teorię relacji porządku.*

### Rozwiązanie

Weźmy drzewo z wyróżnionym korzeniem jak na rysunku 6.39. Oczywiście każdemu węzłowi odpowiadają co najwyżej dwa liście. W celu uporządkowania tego drzewa weźmy pod uwagę alfabet  $\Sigma = \{a, b\}$ , z relacją  $a < b$ . Przeprowadzimy teraz proces tzw. *etykietyzacji* tego drzewa polegający na przyporządkowywaniu kolejnym wierzchołkom elementów słownika powstałego z alfabetu  $\Sigma$ . Dostaniemy kolejno:

$$w_1 \longrightarrow \lambda \text{ (słowo puste)}, w_2 \longrightarrow a, w_3 \longrightarrow b,$$

$$w_4 \longrightarrow aa, w_5 \longrightarrow ab, w_6 \longrightarrow ba,$$

$$w_7 \longrightarrow aba, w_8 \longrightarrow abb, w_9 \longrightarrow abba, w_{10} \longrightarrow abbb.$$

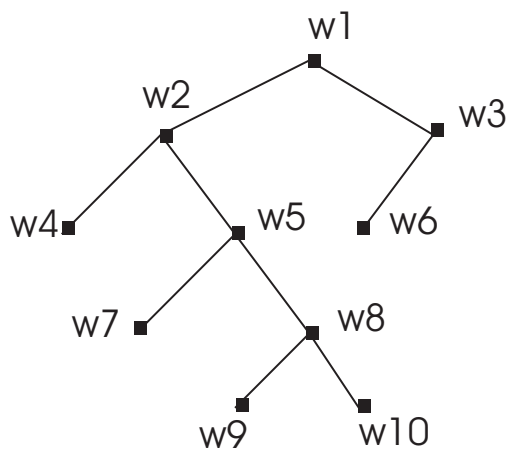
Ponieważ zbiór słów

$$S = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, aba, abb, abba, abbb\}$$

jako podzbiór słownika można uporządkować relacją standardową  $\prec_s$

$$\lambda \prec_s a \prec_s b \prec_s aa \prec_s ab \prec_s ba \prec_s aba \prec_s abb \prec_s abba \prec_s abbb,$$

umożliwia to uporządkowanie naszego drzewa binarnego.



Rysunek 6.39: drzewo binarne

□

## 6.2 Zadania

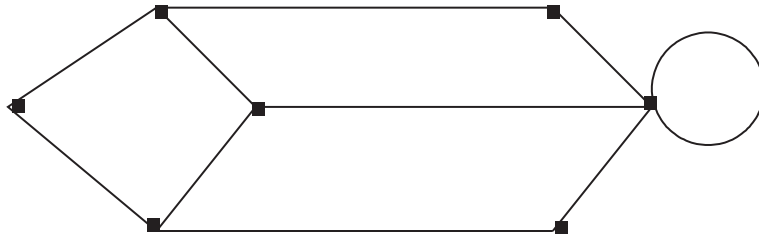
**Zadanie 6.2.1** Sporządzić rysunek grafu  $\mathbb{G}$ , jeśli

$$W = \{a, b, c, d, e\}, K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\},$$

$$\gamma(k_1) = (b, b), \gamma(k_2) = (a, c), \gamma(k_3) = (a, a), \gamma(k_4) = (c, e),$$

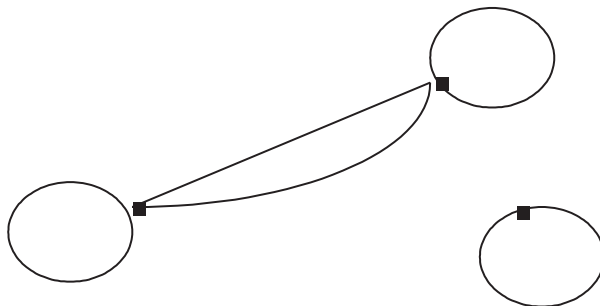
$$\gamma(k_5) = (c, d), \gamma(k_6) = (a, b).$$

Czy  $\mathbb{G}$  może mieć inną postać reprezentacji graficznej?

Rysunek 6.40: graf  $\mathbb{G}$ 

**Zadanie 6.2.2** Dany jest graf jak na rysunku 6.40. Podać jego opis analityczny.

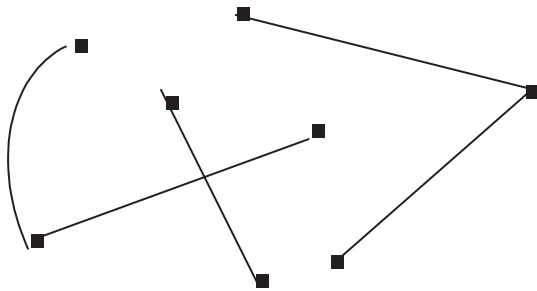
**Zadanie 6.2.3** Uzasadnić, że rysunek 6.41 przedstawia wykres pewnego grafu.

Rysunek 6.41: graf  $\mathbb{G}$ 

**Zadanie 6.2.4** Podać przykład grafu acyklicznego.

**Zadanie 6.2.5** W grafie podanym na rysunku 6.42 wskazać drogę długości 3. Czy graf ten posiada drogę długości 4? Czy w grafie tym istnieją drogi proste?

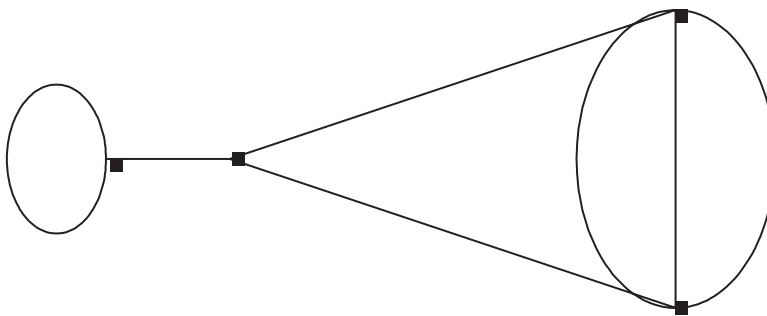


Rysunek 6.42: graf  $\mathbb{G}$ 

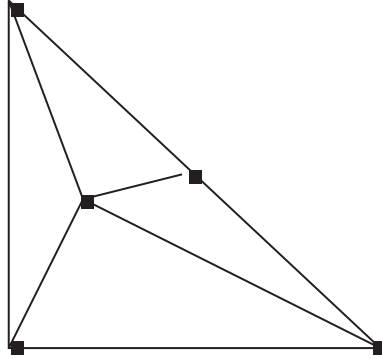
**Zadanie 6.2.6** Udowodnić twierdzenie o "uściskach dłoni".

**Zadanie 6.2.7** Narysować graf ilustrujący problem mostów królewieckich i wyjaśnić dlaczego problem Eulera nie ma rozwiązania.

**Zadanie 6.2.8** Dany jest graf jak na rysunku 6.43

Rysunek 6.43: graf  $\mathbb{G}$ 

Czy jest to graf prosty? Czy  $\mathbb{G}$  jest grafem acyklicznym? Czy  $\mathbb{G}$  jest grafem spójnym? Obliczyć  $\sum \deg(w)$ .

Rysunek 6.44: graf  $\mathbb{G}$ 

**Zadanie 6.2.9** Czy graf  $\mathbb{G}$  z rysunku 6.44 jest grafem pełnym?

**Zadanie 6.2.10** Sprawdzić, że graf Petersena może mieć następującą interpretację algebraiczną

$$W = \{u_j, v_j, j = 0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$K = \{x_j, y_j, z_j: \gamma(x_j) = (u_j, u_{(j+1) \bmod 5}),$$

$$\gamma(y_j) = (v_j, v_{(j+2) \bmod 5}), \gamma(z_j) = (u_j, v_j), j = 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

**Zadanie 6.2.11** Pokazać, że graf Petersena ilustruje działanie dwóch permutacji

$$(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)(v_0, v_2, v_4, v_1, v_3)$$

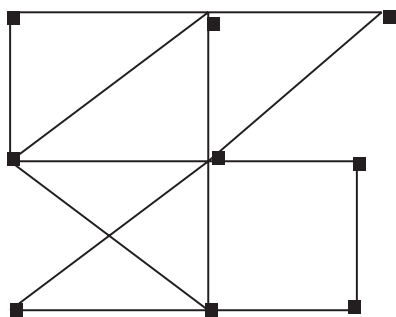
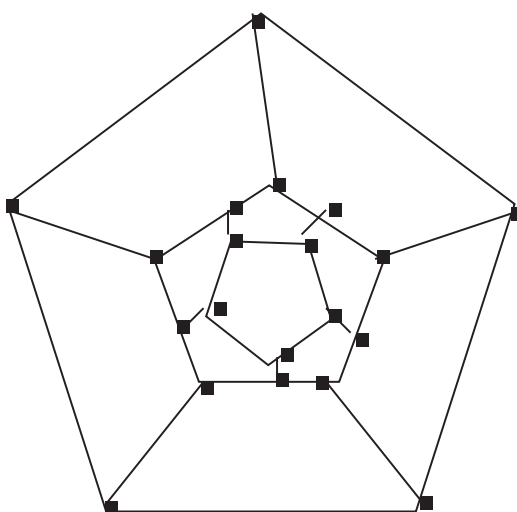
oraz

$$(u_0, v_0)(u_1, v_1)(u_2, v_2)(u_3, v_3)(u_4, v_4)$$

na zbiorze wierzchołków  $W = \{u_j, v_j, j = 0, 1, 2, 3, 4\}$ .

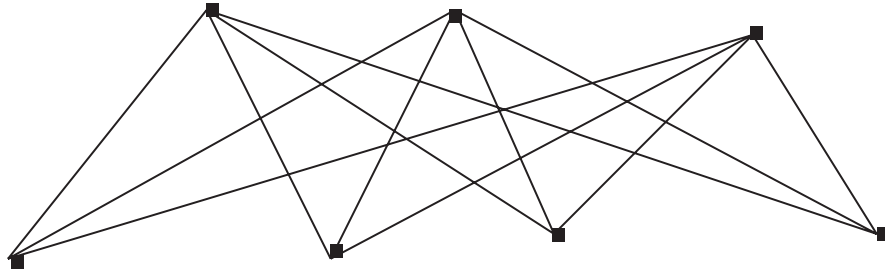
**Zadanie 6.2.12** Uzasadnić, że graf z rysunku 6.45 ma cykl Eulera. Stosując algorytm Fleury'ego, skonstruować ten cykl.

**Zadanie 6.2.13** Znaleźć cykl Hamiltona w grafie podanym na rysunku 6.46.

Rysunek 6.45: graf  $\mathbb{G}$  z cyklem EuleraRysunek 6.46: graf  $\mathbb{G}$  z cyklem Hamiltona

**Zadanie 6.2.14** Korzystając z twierdzenia Eulera o cyklu Eulera pokazać, że skończony graf spójny mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego ma drogę Eulera.

**Zadanie 6.2.15** *Uzasadnić, że graf z rysunku 6.47 nie jest grafem Hamiltona.*



Rysunek 6.47: graf  $\mathbb{G}$

**Zadanie 6.2.16** *Niech  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\}$ . Na  $A \times B$  definiujemy relację  $\mathcal{S}$*

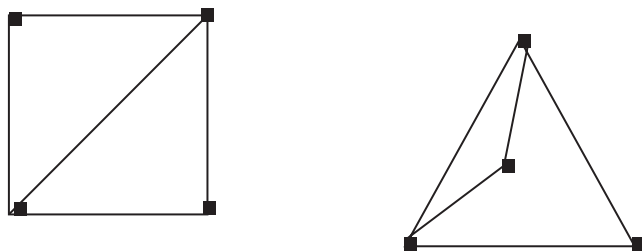
$$\begin{aligned} & a_1 \mathcal{S} b_1, a_1 \mathcal{S} b_8 \\ & a_2 \mathcal{S} b_1, a_2 \mathcal{S} b_6, a_2 \mathcal{S} b_7, \\ & a_3 \mathcal{S} b_2, a_3 \mathcal{S} b_6, \\ & a_4 \mathcal{S} b_5, a_4 \mathcal{S} b_7, \\ & a_5 \mathcal{S} b_3, a_5 \mathcal{S} b_4. \end{aligned}$$

*Narysować graf reprezentujący skojarzenia opisane relacją  $\mathcal{S}$ . Czy graf ten posiada graf skojarzony?*

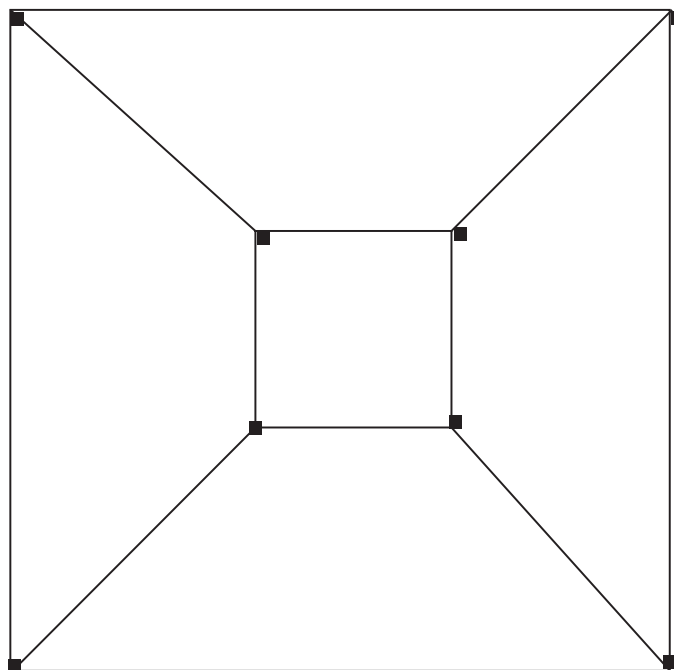
**Zadanie 6.2.17** *Uzasadnić, że dwa grafy przedstawione na rysunku 6.48 są izomorficzne. Skonstruować ten izomorfizm.*

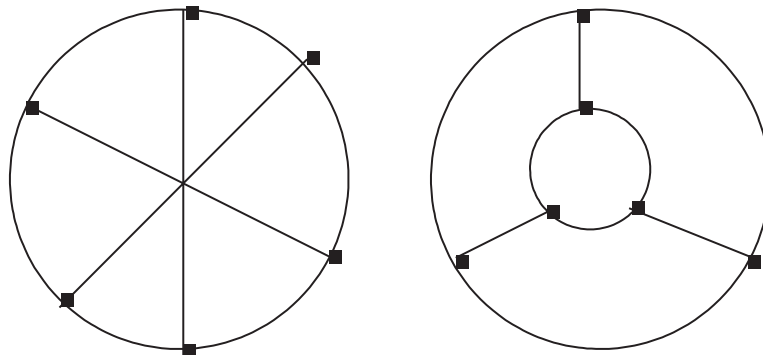
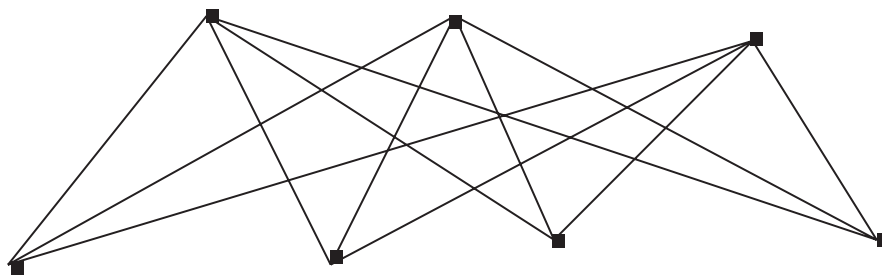
**Zadanie 6.2.18** *Uzasadnić, że graf z rysunku 6.49 może być wykorzystany do celu konstrukcji kodu Graya długości 3.*

**Zadanie 6.2.19** *Które dwa spośród trzech grafów z rysunków 6.50 i 6.51 na pewno nie są izomorficzne, a które mogą być izomorficzne? Sprawdzić czy są.*



Rysunek 6.48: grafy izomorficzne

Rysunek 6.49: graf  $G$

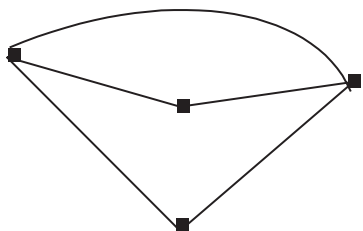
Rysunek 6.50: graf  $G_1$  i  $G_2$ Rysunek 6.51: graf  $G_3$ 

**Zadanie 6.2.20** Dany jest graf jak na rysunku 6.52. Czy jest to graf planarny? Sprawdzić, czy zachodzi dla tego grafu twierdzenie Eulera o regionach.

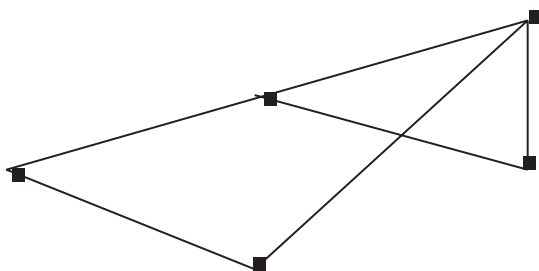
**Zadanie 6.2.21** Wyjaśnić znaczenie drzewa przeszukiwań binarnych.

**Zadanie 6.2.22** Czy graf, który nie jest spójny może mieć drzewo spinające?

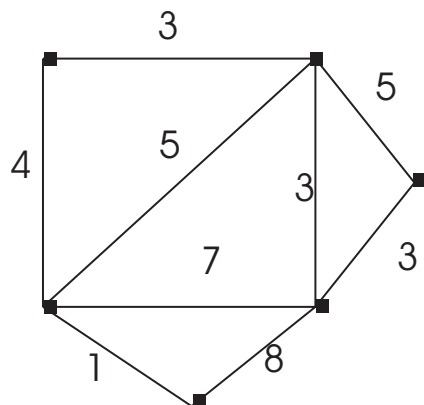
**Zadanie 6.2.23** Narysować kilka drzew spinających graf  $K_4$ . Ile jest takich drzew?

Rysunek 6.52: graf  $\mathbb{G}$ 

**Zadanie 6.2.24** Czy graf z rysunku 6.53 zawiera drzewo spinające? Jeśli tak, to narysować je.

Rysunek 6.53: graf  $\mathbb{G}$ 

**Zadanie 6.2.25** Niech  $\mathbb{G}$  będzie grafem z wagami jak na rysunku 6.54. Wybrać takie drzewo spinające  $T$ , że  $\sum_{k \in K(T)} w(k) = \min$ .

Rysunek 6.54: graf  $G$