Uwaga 2.2.2 *Komentarza wymaga znaczenie stopy bazowej. Z definicji wynika, że* $i_T = \frac{FV-PV}{PV}$*, co wcale nie oznacza, że wartość indeksu* i_T *zależy od wartości początkowej* PV*. Wskaźnik* i_T *liczbowo przedstawia dwa aspekty MOP: czas trwania zjawiska oraz jego dynamikę. Miarą dynamiki zjawiska zmiany wartości kapitału w czasie jest iloraz*

$$\frac{K(t_o+\Delta t)-K(t_o)}{\Delta t},$$

gdzie $0 \leq t_o < T$*,* $\Delta t > 0$ *i* $t_o + \Delta t \leq T$*. Zauważmy, że z założenia* (2.1) *i wzoru* (2.2)*, dla danego MOP dynamika ta jest zawsze stała i wynosi* $q = \frac{FV-PV}{T}$*.*
W takim razie, jeśli dla takiego MOP zmienią się warunki brzegowe na $\tilde{PV}$ *i* $\tilde{FV}$*, to zawsze*

$$\frac{\tilde{FV}-\tilde{PV}}{\tilde{PV}} = \frac{FV-PV}{PV} = i_T.$$

Uwaga 2.2.3 *MOP odpowiada klasyczna transakcja, którą najprościej jest opisać w układzie bilateralnym. Dane są dwa podmioty* A *i* B*, z których podmiot* A *dysponuje nadwyżką finansową–reprezentuje podaż, podmiot* B *reprezentuje popyt. Podmioty te zawierają umowę: na określony czas (liczony w ilościach dni) podmiot* A *pożycza podmiotowi* B *kapitał w wysokości* PV*, który musi być zwrócony na koniec. Miarą poniesionego kosztu przez podmiot* B *są odsetki naliczone jednorazowo od pożyczonego kapitału za czas trwania transakcji. Dla podmiotu* A *odsetki te są zyskiem z transakcji.*

Przykład 2.2.1 *Wspólnota mieszkaniowa lokuje* 10000 *zł na lokacie rocznej w banku, której oprocentowanie w skali roku wynosi* 5%*. Ile wspólnota otrzyma po upływie roku?*

Mamy tutaj obraz sytuacji opisanej w uwadze powyżej. Z założenia $T = ldr$ (liczba dni roku), $i_T = 0,05$, $PV = 10000$. Zysk z lokaty, to odsetki I_T za okres T, dlatego $PV + I_T$ stanowi kwotę jaką otrzyma wspólnota po roku, czyli

$$FV = PV + I_T = 10000 + 10000 \cdot 0,05 = 10500.$$

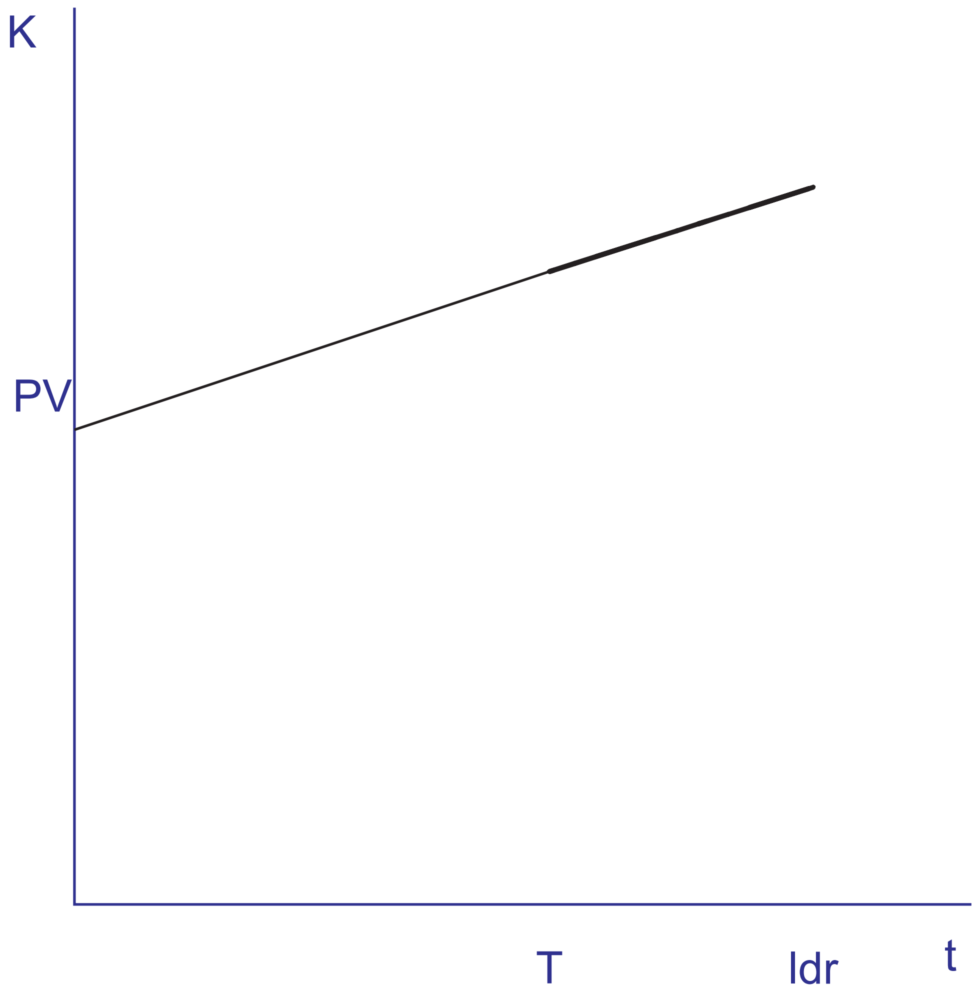
W praktyce wygodniej jest posługiwać się standardową długością okresu T jaką jest ldr (patrz przykład wyżej). Ponieważ wtedy na ogół $T < ldr$, należy przedłużyć funkcję $t \longrightarrow K(t)$ z przedziału $[0,T]$ na przedział $[0,ldr]$ (patrz rys. 3). Oczywiście dalej dostaniemy funkcję liniową. Po podstawieniu $t = ldr$ do wzoru (2.5) otrzymamy

$$K(ldr) = PV i_T \frac{ldr}{T} + PV. \tag{2.9}$$

Oznaczając we wzorze (2.9),

$$R = i_T \frac{ldr}{T}, \text{ czyli } i_T = R\frac{T}{ldr}, \tag{2.10}$$

dostaniemy *zasadę dopasowania stopy bazowej do stopy rocznej* R zwanej też stopą p.a. (z łac. per annum).



Rysunek 2.3: ilustracja przedłużenia funkcji $t \to K(t)$

Przykład 2.2.2 *Wspólnota stoi przed wyborem: czy ulokować* 5000 *zł na pół roku według stopy rocznej* 7%, *czy* 4000 *zł na rok według stopy rocznej* 9%.

Z treści przykładu możemy się domyślać, że wspólnota nie dysponuje dużą nadwyżką finansową i dlatego rozważa różne okresy deponowania swoich środków, biorąc pod uwagę ryzyko związane ze zjawiskiem utraty płynności. Zauważmy, że warianty brane pod uwagę są nieporównywalne. Zgodnie bowiem z *zasadą datowania kapitału* nie można ze sobą porównywać wartości przyszłych datowanych różnie. W takim razie wariant pierwszy należy prolongować do całego roku. Niech I_T, gdzie $T = \frac{ldr}{2}$ oznaczają odsetki dla wariantu pierwszego za okres T, I_1 odsetki z uwzględnieniem przedłużenia tej transakcji, a więc należne po upływie roku. Wtedy, z *zasady dopasowania stopy*, dla stopy $i_T = 0,07 \cdot \frac{ldr/2}{ldr} = 0,035$ dostaniemy

$$I_1 = 5000 \cdot i_T + 5000 \cdot i_T = 350.$$

Tymczasem odsetki I_2 należne również po roku z transakcji drugiej wyniosą

$$I_2 = 4000 \cdot 0,09 = 360.$$

ponieważ $I_2 > I_1$, więc przy nie uwzględnianiu ryzyka związanego z być może utratą płynności, wariant drugi jest korzystniejszy.

Analiza przedstawiona w powyższym przykładzie prowadzi nas do następującego wniosku

Wniosek 2.2.1 *Przypuśćmy, że MOP z parametrami: T, PV, i_T został prolongowany do okresu nT dla pewnej liczby naturalnej $n > 1$. Oznaczmy przez FV_n wartość przyszłą po upływie czasu nT. Wtedy*

$$FV_n = PV + I_1 + I_2 + \ldots + I_n, \tag{2.11}$$

gdzie I_j oznaczają odsetki liczone od wartości początkowej PV za okres T. Zauważmy, że ponieważ odsetki I_j są należne dopiero po upływie nT dni, datowane są jednakowo i dlatego można je dodając–kumulować. W takim razie, z (2.11) *dostaniemy*

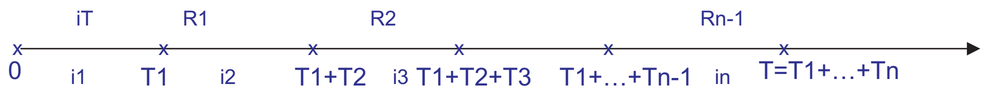
$$FV_n = PV + PVi_T + \ldots + PVi_T = PV + PVni_T = PV(1 + ni_T). \tag{2.12}$$

Na koniec zauważmy, że do takiego samego wyniku możemy dojść przedłużając funkcję $t \longrightarrow K(t)$ do przedziału $[0, nT]$, tak jak to zrobiliśmy w przypadku zasady dostosowania stopy. Istotnie, ze wzoru (2.3)*, po podstawieniu $t = nT$ dostaniemy*

$$FV_n = K(nT) = PVi_T\frac{nT}{T} + PV = PV(1 + ni_T).$$

Procedura opisana w ostatnim wniosku ma znaczenie czysto teoretyczne, jak pokazaliśmy to w powyższym przykładzie. W praktyce spotykamy się ze zjawiskiem w pewnym sensie odwrotnym. Dokładniej, w pierwszej fazie trwania transakcji z parametrami: T, i_T, PV, po upływie T_1 dni, $0 < T_1 < T$ zaczęła obowiązywać nowa stopa R_1 podana jako stopa p.a. Po upływie kolejnych T_2

dni, $T_1 + T_2 < T$ zaczęła obowiązywać stopa p.a. R_2. Wreszcie, po upływie kolejnych T_{n-1} dni, $T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} < T$, do końca przez T_n dni obowiązywała stopa p.a. R_{n-1} (patrz rys. 4)). Wyliczymy w zaistniałej sytuacji przysługujące odsetki w ramach MOP.



Rysunek 2.4: ilustracja zjawiska zmiany stopy bazowej w MOP

W tym celu podzielmy oryginalny przedział czasowy $[0, T]$ chwilami: $T_1, T_1 + T_2, \ldots, T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$. Dla każdego z tak powstałych podokresów niech i_j oznacza obowiązującą w nim stopę. Dostaniemy kolejno:

$$i_1 = i_T \frac{T_1}{T},\ i_2 = R_1 \frac{T_2}{ldr}, \ldots, i_n = R_{n-1} \frac{T_n}{ldr}.$$

Wtedy odsetki I_j naliczone za kolejne podokresy od wartości początkowej według stopy i_j wyniosą

$$I_j = PV i_j.$$

Ponieważ należne będą dopiero po upływie T dni, jako jednakowo datowane będzie je można skumulować do wartości I_T.

Dlatego

$$I_T = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = PV(i_1 + i_2 + \ldots + i_n).$$

Przykład 2.2.3 *W dniu 17 marca właściciele lokali we wspólnocie Alternatywy 4 zobowiązali zarządcę do ulokowania wolnych środków stanowiących rezerwy z opłat bieżących właścicieli w wysokości* 8000 *zł na rocznej lokacie terminowej oprocentowanej na* 8%*. Zarządca następnego dnia wykonał dyspozycje w banku zgodną z uchwałą właścicieli. Po upływie* 90 *dni od założenia lokaty bank powiadomił zarządcę o zmianie stopy p.a. na* 7%*. Niestety, 10 grudnia tego samego roku nastąpiła awaria instalacji elektrycznej, zmuszająca wspólnotę do natychmiastowej likwidacji lokaty celem pokrycia kosztów remontu. Bank w takiej sytuacji nalicza odsetki według MOP. Obliczyć wysokość odsetek należnych wspólnocie. Przyjąć, że rok ten ma* 365 *dni.*

Zaczynamy od konstrukcji przedziału czasowego i kolejnych podokresów (patrz rys. 5). Początkiem przedziału jest dzień 18 marca. Wydarzeniem, które wyróżnia pierwszy podokres jest zmiana oprocentowania i liczy on 90 dni. Kończy się zatem 25 czerwca. Kolejny podokres trwa od 26 czerwca do 10 grudnia i spowodowany jest zerwaniem umowy o lokatę. Okres ten trwa 168 dni. W okresach tych obowiązują stopy bazowe, gdzie

$$i_1 = 0,08 \cdot \frac{90}{365} = 0,019, \; i_2 = 0,07 \cdot \frac{168}{365} = 0,032.$$

Stąd $I_T = I_1 + I_2$, gdzie $T = 258$ oraz

$$I_1 = PVi_1 = 8000 \cdot 0,019 = 152,00, \; I_2 = PVi_2 = 8000 \cdot 0,032 = 257,75,$$

czyli $I_T = 409,75$.

Rysunek 2.5: ilustracja do przykładu 1.2.3

2.3 Model odsetek złożonych

Weźmy klasyczny przypadek MOP z parametrami: T, i_T, PV, FV. Okres $[0, T]$ podtraktujmy jako kolejny j–ty podokres przedziału czasowego $[0, nT]$ dla $n > 1$ z parametrami: i_T, PV_j, FV_j, gdzie $FV_j = PV_{j+1}$, czyli wartość przyszła j–tego podokresu jest wartością teraźniejszą podokresu następnego–$j+1$ (patrz rysunek 6). Wtedy na mocy MOP

$$FV_j = PV_j(1 + i_T), \text{ dla } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.13}$$

W takim razie

$$FV_2 = PV_2(1 + i_T) = FV_1(1 + i_T) = PV(1 + i_T)(1 + i_T) = PV(1 + i_T)^2.$$

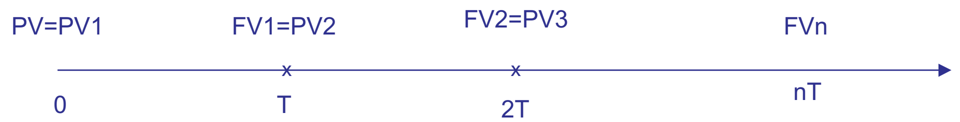
I ogólnie, dla każdego $1 \leq j \leq n$

$$FV_j = PV(1 + i_T)^j. \tag{2.14}$$

W szczególności

$$FV_n = PV(1 + i_T)^n. \tag{2.15}$$

Zjawisko oparte na powyższych założeniach i opisane wzorami (2.13)–(2.15) nazywamy *modelem odsetek złożonych* (MOZ). Natomiast równość $FV_j = PV_{j+1}$ nazywamy *kapitalizacją odsetek*, bowiem odsetki naliczone na koniec okresu w wysokości $PV_j i_T$ powiększają kapitał PV_j stając się składową kolejnego kapitału początkowego PV_{j+1}. Mówimy też, że odsetki *skapitalizowały się*.



Rysunek 2.6: ilustracja do MOZ

Przykład 2.3.1 *Wspólnota mieszkaniowa lokuje na trzy lata* 5000 *zł na koncie bankowym oprocentowanym w skali roku na* 6%. *Zakładając MOZ z kapitalizacją półroczną wyznaczyć wartość depozytu na koniec umowy.*

Z założenia mamy do czynienia z $n = 6$–krotną kapitalizacją, ze stopą bazową $i_T = 0,06 \cdot \frac{ldr/2}{ldr} = 0,03$. W takim razie, z (2.15) dostaniemy

$$FV_6 = 5000 \cdot (1 + 0,03)^6 = 5970,26.$$

Gdybyśmy zdecydowali się tylko na dwukrotne prolongowanie rocznej lokaty, to zgodnie z MOP

$$FV_6 = 5000 \cdot (1 + 3 \cdot 0,06) = 5900,00.$$

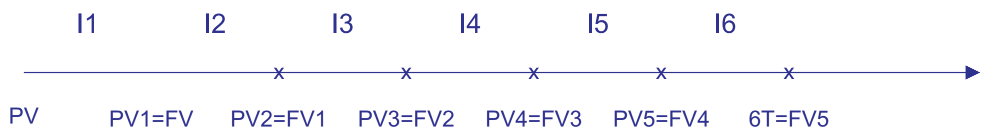
I ogólnie, ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ i liczby rzeczywistej $a \geq 0$ zachodzi nierówność Bernoulliego

$$(1+a)^n > 1 + na,$$

widzimy, że MOZ złożony z n–krotnej kapitalizacji złożonej jest wydajniejszy od MOP realizującego dla tych samych podokresów zjawisko prolongaty, czyli

$$PV(1+i_T)^n > PV(1+ni_T).$$

Wróćmy do powyższego przykładu i wyznaczmy wartości naliczonych odsetek na koniec kolejnych podokresów (patrz rys. 7).



Rysunek 2.7: ilustracja do przykładu 1.3.1

Z MOP, przy uwzględnieniu zjawiska kapitalizacji dostaniemy kolejno:

$$I_1 = PVi_T = 5000 \cdot 0,03 = 150,$$

$$I_2 = PV_1 i_T = FVi_T = (PV + I_1)i_T = 5150 \cdot 0,03 = 154,50,$$
$$I_3 = PV_2 i_T = FV_1 i_T = (PV_1 + I_2)i_T = 5304,5 \cdot 0,03 = 159,14,$$
$$I_4 = PV_3 i_T = FV_2 i_T = (PV_2 + I_3)i_T = 5463,64 \cdot 0,03 = 163,91,$$
$$I_5 = PV_4 i_T = FV_3 i_T = (PV_3 + I_4)i_T = 5627,55 \cdot 0,03 = 168,83,$$
$$I_6 = PV_5 i_T = FV_4 i_T = (PV_4 + I_5)i_T = 5796,38 \cdot 0,03 = 173,89.$$

I ostatecznie

$$FV_5 = PV_5 + I_6 = 5796,38 + 173,89 = 5970,27.$$

W sytuacji ogólnej, ponieważ $FV_j = PV_j + I_j$ oraz $PV_j = FV_{j-1}$, dostaniemy

$$FV_j = PV_j + I_j = FV_{j-1} + I_j, \tag{2.16}$$

skąd ze wzoru (2.15) otrzymamy

$$I_j = FV_j - FV_{j-1} = PV(1+i_T)^j - PV(1+i_T)^{j-1} = PVi_T(1+i_T)^{j-1}. \tag{2.17}$$

Z drugiej strony możemy mówić o odsetkach I_{sk} takich, że

$$FV_n = PV + I_{sk}, \text{ czyli } I_{sk} = I_T. \tag{2.18}$$

Wtedy ze wzoru (2.15)

$$I_{sk} = PV((1 + i_T)^n - 1). \tag{2.19}$$

Odsetki te (nie mylić z odsetkami I_j) nazwiemy dalej *odsetkami skumulowanymi.* Ich rolę wyjaśnia kolejny przykład

Przykład 2.3.2 *Wspólnota mieszkaniowa podejmuje decyzję o wpłacie do banku na trzy lata kwoty* 20000 *zł stanowiącej środki funduszu remontowego. Obowiązująca w tym okresie stopa roczna wynosi* 8%, *odsetki kapitalizowane są w cyklu rocznym. O ile powiększy się złożony kapitał na koniec umowy? O jaką wartość przyrosną odsetki po pierwszym, po drugim oraz po trzecim roku trwania lokaty?*

Kapitał powiększy się o odsetki skumulowane. Obliczymy je zgodnie z formułą (2.19), co daje

$$I_{sk} = PV((1 + i_T)^n - 1) = 20000 \cdot (1,008^3 - 1) = 5194,24.$$

Po pierwszym roku lokaty wartość odsetek wyniesie zgodnie ze wzorem (2.17)

$$I_1 = PVi_T = 20000 \cdot 0,08 = 1600,00.$$

Po drugim roku

$$I_2 = PVi_T(1 + i_T) = 20000 \cdot 0,08 \cdot 1,08 = 1728,00.$$

Po trzecim, ostatnim roku

$$I_3 = PVi_T(1 + i_T)^2 = 20000 \cdot 0,08 \cdot 1,008^2 = 1866,24.$$

Zauważmy, że $I_1 + I_2 + I_3 = 5194,24 = I_{sk}$. Ostatni wynik wymaga komentarza. Z jednej strony popełniamy błąd, łamiąc zapis *zasady porównywania kapitału,* próbując dodawać do siebie kapitał różnie datowany. Z drugiej strony na przytoczonym przykładzie zauważamy pewną prawidłowość. Odniesiemy się najpierw do drugiej kwestii. W tym celu weźmy pod uwagę wartości kolejnych odsetek: $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Spośród nich wybierzmy sąsiednie I_j, I_{j+1} i korzystając z (2.17) podzielmy je przez siebie

$$\frac{I_{j+1}}{I_j} = \frac{PVi_T(1 + i_T)^j}{PVi_T(1 + i_T)^{j-1}}.$$

Po uproszeniu dostaniemy

$$\frac{I_{j+1}}{I_j} = 1 + i_T,$$

co oznacza, że każdy taki iloraz jest jednakowy. W matematyce mówimy wtedy, że $I_1, I_2, \ldots, I_n$ są kolejnymi wyrazami *ciągu geometrycznego* o *ilorazie* równym $1 + i_T$. Ponadto wiadomo, że wtedy

$$I_1 + I_2 + \ldots + I_n = I_1 \frac{1 - (1 + i_T)^n}{1 - (1 + i_T)}, \tag{2.20}$$

co po uproszeniu i skorzystaniu ze wzoru na I_{sk} daje

$$I_1 + I_2 + \ldots + I_n = PV i_T \frac{(1 + i_T)^n - 1}{i_T} = PV((1 + i_T)^n - 1) = I_{sk}. \tag{2.21}$$

Zatem w MOZ zawsze odsetki skumulowane równe są sumie odsetek naliczonych za kolejne okresy kapitalizacji. Usprawidliwieniem możliwości dodawania do siebie tych odsetek jest fakt, że ich należność zapada dopiero na koniec kapitalizacji i w tym sensie są jednakowo datowane.

Możemy teraz zdefiniować kolejną stopę i_{ef}, gdzie na mocy (2.21),

$$i_{ef} = \frac{I_{sk}}{PV} = \frac{I_T}{PV} = (1 + i_T)^n - 1, \tag{2.22}$$

którą nazywamy *stopą efektywną* w MOZ za okres nT. Zauważmy, że dla tej stopy

$$FV_n = PV + PV i_{ef}. \tag{2.23}$$

Ponadto, z nierówności Bernoulliego, dla tej stopy mamy nierówność, której wersję już widzieliśmy przy porównaniu obu modeli odsetkowych

$$i_{ef} > n i_T, \text{ o ile } n \geq 2. \tag{2.24}$$

Przykład 2.3.3 *Wspólnota mieszkaniowa otrzymała dwie propozycje ulokowania wolnych środków:*

1. 10000 *zł na* 18 *miesięcy z kapitalizacją kwartalną w.g. stopy p.a. równej* 7%*;*

2. 10000 *zł na* 18 *miesięcy z kapitalizacją półroczną w.g. stopy p.a. R.*

Dla jakiej wartości R wariant pierwszy będzie korzystniejszy?

Ponieważ $6T_1 = 3T_2$, gdzie T_1 i T_2 oznaczają okresy kapitalizacji dla tych wariantów, wykorzystamy pojęcie stopy efektywnej.

Dla wariantu pierwszego mamy:

$$i_{T_1} = 0,07 \cdot \frac{1/4 \cdot ldr}{ldr} = 0,0175,$$

więc

$$I_{sk_1} = I_{6T_1} = PV_1((1+i_{T_1})^6 - 1) = 10000 \cdot (1,0175^6 - 1) = 1097,02.$$

Dlatego

$$i_{ef_1} = \frac{I_{sk_1}}{PV_1} \cong 0,1097.$$

Wartość stopy R musi być taka, aby $i_{ef_1} > i_{ef_2}$, bowiem obie stopy efektywne obejmują ten sam okres. Oznacza to, że

$$0,1097 > \left(1 + \frac{R}{2}\right)^3 - 1, \text{ bowiem } i_{T_2} = \frac{R}{2}.$$

Po przekształceniu otrzymamy

$$1 + \frac{R}{2} < \sqrt[3]{1,1097} \cong 1,0353$$

i dlatego $R < 0,0706$, czyli $R < 7,06\%$.

Dla MOZ z parametrami: PV, i_T, n porównamy teraz wartość stopy efektywnej ze stopą roczną. Zaczniemy od przykładu liczbowego, wykorzystując do tego celu dane z przykładu powyższego: $R = 0,07$, $i_{ef} = 0,1097$. Problem polega na tym, że stopy te odnoszą się do różnych okresów–dlatego nie można ich porównywać. W takim razie należy wartość stopy efektywnej zrelatywizować do okresu ldr. W tym celu do jej obliczenia należy wziąć takie n_o, że

$$n_o \cdot T = ldr,$$

co w naszym przypadku oznacza, że $n_o = 4$. Wtedy $PV\Big((1+i_T)^{n_o} - 1\Big)$ opisuje zysk z MOZ za okres roku. Oznaczmy tę stopę przez i_o, czyli

$$i_o = (1+i_T)^{n_o} - 1 = 1,0175^4 - 1 \cong 0,07196 > R.$$

Rozważmy teraz sytuację ogólną. Wtedy $i_T = R\frac{T}{ldr}$ i $i_{ef} = (1+i_T)^n - 1$. Załóżmy, że

$$n_oT = ldr$$

dla pewnej liczby naturalnej n_o, co oznacza, że $T < ldr$ i w ciągu ldr kapitalizacja przebiega całkowitą ilość razy. Wtedy

$$i_o = \left(1 + R\frac{T}{ldr}\right)^{n_o} - 1 = \left(1 + \frac{R}{n_o}\right)^{n_o} - 1.$$

Z nierówności Bernoulliego mamy teraz $i_o > R$, o ile $n_o \geq 2$. Możemy więc sformułować następujący wniosek

Wniosek 2.3.1 *Niech dla MOZ, $T < ldr$ i w ciągu ldr kapitalizacja odbywa się n_o razy, czyli $n_o T = ldr$. Jeśli $n_o = 1$, to $i_o = R = i_T$. W przeciwnym razie mamy zawsze $R < i_o$.*

Stopę i_o dalej będziemy nazywali *efektywną stopą nominalną*. Poznaliśmy w ten sposób cztery rodzaje stóp procentowych: stopę bazową i_T, stopę p.a. R, stopę efektywną i_{ef} i stopę efektywną nominalną i_o. W następnym rozdziale poznamy kolejną, piątą stopę–stopę dyskontową.