O nieskończoności w matematyce i jej konsekwencjach

Ryszard Rębowski*
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych
Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy
rebowskir@pwsz-legnica.eu
http://www.pwsz.legnica.edu.pl/~rebowskir

20 grudnia 2014

1 Wprowadzenie

Zapewne wszyscy z nas widzieliśmy oraz posługiwaliśmy się symbolem "∞" i potrafimy go nazwać. Oczywiście chodzi o termin *nieskończoność*[1]. Cóż on oznacza na co dzień? Jedna z odpowiedzi może brzmieć następująco:

wszystko co nie ma charakteru skończonego nazywane jest nieskończonością, bowiem termin *nieskończoność* jest tutaj dopełnieniem terminu *skończoność*.

Dlatego wypowiedź *wszystko jest skończone albo nieskończone*, zgodnie ze znaną *zasadą wyłączonego środka* użyta w powyższym kontekście powinna oznaczać zawsze prawdę. Oczywiście wyjaśnienie to w żadnym wypadku nie stanowi definicji pojęcia *nieskończoności*, a przecież takiej definicji oczekujemy. Umówimy się, że nie będziemy próbowali szukać takiej definicji w obszarze filozofii czy metafizyki a nawet fizyki, aczkolwiek historia nauki dobrze pokazuje,

*wykład na Uniwersytecie III Wieku, sesja wyjazdowa w Jaworze i PWSZ Legnica.

[1] Uważa się ([10]), że po raz pierwszy wprowadził go do matematyki angielski matematyk John Wallis w 1655 r. Prawdopodobnie Wallis wykorzystał do tego celu rzymskie oznaczenie liczby 1000 – *CD* bądź grecką literę ω.

że w każdej epoce cywilizacja ludzka tematyką tą próbowała zajmować się[2]. Wśród licznych źródeł odsyłam Państwa do zasobów internetowych YouTube:
`http://youtu.be/-BQERkg5khc`, `http://youtu.be/OtLybe6iJy4`, `http://youtu.be/c7ThD42_RN4`. Zachęcam również do studiowania literatury, której wykaz zamieściłem na końcu.

Jak spróbuję Państwu pokazać, w matematyce sytuacja dotycząca *nieskończoności* jest o wiele bardziej złożona i wymaga wieloaspektowego spojrzenia na sprawę.

2 Aspekt mnogościowy

W matematyce kluczowym pojęciem jest *zbiór*, czyli *mnogość*. Rola zbioru jest na tyle ważna, że ma on rangę pojęcia pierwotnego i jako takie nie jest definiowane. Mówi się, że mamy dany zbiór $\mathbf{A}$, odnosząc się w ten sposób do jego nazwy. Przez to rozumiemy, że istnieje co najmniej jeden obiekt $\mathbf{a}$, nazywany *elementem* zbioru $\mathbf{A}$, co zapisujemy symbolicznie $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$. W takiej sytuacji mówimy też, że zbiór $\mathbf{A}$ jest *niepusty*, co zapisujemy $\mathbf{A} \neq \emptyset$. W przeciwnym razie mamy do czynienia ze zbiorem pustym i piszemy $\mathbf{A} = \emptyset$. Jeśli znamy wszystkie elementy, z których składa się nasz zbiór, wtedy możemy odwołać się do niego poprzez jego treść, co zapisujemy następująco

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}.$$

Oznacza to, że zbiór ten składa się dokładnie z trzech elementów: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, i $\mathbf{c}$. Z tego powodu będziemy mówili, że jest *zbiorem skończonym*. Opiszemy to dokładniej. Wyobraźmy sobie, że wzięliśmy pod uwagę wszystkie możliwe zbiory złożone z trzech elementów. Wtedy o każdych takich dwóch zbiorach powiemy, że są *równoliczne*, a liczbę $\mathbf{3}$ nazwiemy *mocą* każdego z nich lub *liczbą kardynalną*, co zapiszemy

$$|\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}| = \mathbf{3}.$$

I ogólnie, dla każdego zbioru skończonego $\mathbf{A}$ istnieje liczba kardynalna $\mathbf{n}$, która jest jedną z liczb całkowitych nieujemnych taka, że

$$\mathbf{n} = |\mathbf{A}|, \text{gdzie } \mathbf{0} = |\emptyset|.$$

Tymczasem doskonale zdajemy sobie z faktu, że jeśli na liczby naturalne spojrzymy globalnie, to zbiór ten oznaczany przez $\mathbf{N}$ nie może być skończony, bowiem dla każdej $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, liczba $\mathbf{n} + \mathbf{1} \in \mathbf{N}$. Co więcej, zbiór ten nie może być

[2]Szczególną rolę przypisuje się tutaj epoce starożytnej. Dociekania związane ze zjawiskami natury nieskończonej, dokładniej brak ich zrozumienia spowodowały, że ludzie tamtej epoki stali się mistrzami w konstruowaniu paradoksów. Najbardziej znaną postacią był Zenon z Elei cytowany w dziele Arystotelesa ([2]).

równoliczny z żadnym zbiorem skończonym! Oznacza to, że żadna z liczb $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ nie może spełniać równości

$$|\mathbf{N}| = \mathbf{n}.$$

Używając sformułowań twierdzących, moglibyśmy powiedzić, że zbiór liczb naturalnych jest przykładem zbioru nieskończonego, a moc jego nazwać *nieskończonością* zapisując

$$|\mathbf{N}| = \infty.$$

Zauważmy jednak, że to nie załatwia sprawy. Z racji tej, że $\mathbf{N}$ nie jest zbiorem skończonym, nie można zapisać go w konwencji $\{...\}$, poprzez przedstawienie jego zawartości. Oznacza to, że podejście *ilościowe* do opisu zbioru w takim przypadku zawodzi! Problem ten matematyka rozwiązała dopiero na przełomie XIX i XX wieku, kiedy to niemiecki matematyk Georg Cantor (1845–1918) zaproponował odmienne podejście do opisu zbioru – *jakościowe*. Polega ono na tym, że nie treść determinuje zbiór, a kryterium przynależności jakie musi spełniać jego element. Wyjaśnimy to na przykładzie zbioru $\mathbf{N}$. Liczby naturalne to szczególne liczby rzeczywiste. Oznacza to, że zbiór $\mathbf{N}$ powstaje w wyniku wyboru ich ze zbioru liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, według określonego kryterium. Formalnie zapisujemy to następująco

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{r} \in \mathbf{R}\colon\ \varphi(\mathbf{r})\},$$

gdzie symbol φ – reprezentuje kryterium wyboru i wygląda następująco

$$\varphi(r) ='' \mathbf{r} = \mathbf{1} \text{ i } \forall_{r\in\mathbf{R}}\ \mathbf{r} \in \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{1} \in \mathbf{N}''.$$

Sprawdźmy, czy to działa. Treść kryterium wyboru mówi, że liczba $\mathbf{4}$ będzie liczbą naturalną, jeśli będzie nią liczba $\mathbf{3}$. Z kolei ta będzie, jeśli będzie nią liczba $\mathbf{2}$. Ale ta jest, bowiem z założenia jest nią liczba $\mathbf{1}$ oraz $\mathbf{2} = \mathbf{1} + \mathbf{1}$. Zatem $\mathbf{4} \in \mathbf{N}$.

Aby pokazać kolejny problem związany z efektem nieskończonej mocy zbioru, wybierzmy ze zbioru liczb naturalnych zbiór złożonych ze wszystkich liczb podzielnych przez $\mathbf{2}$, czyli z liczb *parzystych*. Oznaczając ten zbiór przez $\mathbf{N}_o$, wykorzystując koncepcję Cantora, możemy zapisać

$$\mathbf{N}_o = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N}\colon\ \mathbf{n} = \mathbf{2k},\ \mathbf{k} \in \mathbf{N}\}.$$

Jasne jest, że zbiór $\mathbf{N}_o$ nie jest skończony. Ponadto, każdej liczbie naturalnej $\mathbf{n}$ możemy przyporządkować dokładnie jedną liczbę parzystą postaci $\mathbf{2n}$, i na odwrót, każda liczba parzysta powstaje dokładnie w ten sposób. Oznaczać to może tylko jedno – zbiory $\mathbf{N}$ i $\mathbf{N}_o$ są równoliczne, a więc tej samej mocy. Z drugiej strony $\mathbf{N}_o$ jest zbiorem mniejszym od $\mathbf{N}$. Zgodzimy się, że kłóci to się z intuicyjnym rozumieniem pojęcia wielkości, bowiem w przypadku zbiorów skończonych mamy

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \text{ i } \mathbf{A} \neq \mathbf{B}\ \Rightarrow |\mathbf{A}| < |\mathbf{B}|.$$

Ale to nie koniec! Najciekawsze przed nami. Weźmy teraz znany nam ze szkoły jednostkowy przedział liczbowy $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, czyli w opisie metodą Cantora

$$[\mathbf{0}, \mathbf{1}] = \{\mathbf{r} \in \mathbf{R}\colon\ \mathbf{0} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{1}\}.$$

Zauważmy, że zbiór ten nie jest skończony, bowiem $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{2}} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, o ile $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Ponadto Cantor zauważył, że liczb z odcinka $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ nie można *ponumerować* liczbami naturalnymi. W takim razie przedział ten jest przykładem nieskończonego zbioru, który nie jest równoliczny ze zbiorem $\mathbf{N}$. Z tego powodu nazywany jest *zbiorem nieprzeliczalnym.* Dlatego jego moc (liczba kardynalna) musi być inna aniżeli ∞!

Prowadzi to do następującego stwierdzenia:

w sensie ilościowym nie ma jednej nieskończoności.

Co więcej, w rozważanej powyżej sytuacji mamy

$$|\mathbf{N}| = \aleph_{\mathbf{o}} \text{ (alef zero)},\ \ |[\mathbf{0}, \mathbf{1}]| = \mathfrak{c} \text{ (kontinuum) oraz } \aleph_o < \mathfrak{c}.$$

Jakie to ma konsekwencje? Już zdecydowaliśmy, obiekt $\aleph_{\mathbf{o}}$ nazwaliśmy przecież liczbą. Skoro tak, to powinna ona nadawać się do celu wykonywania arytmetyki. Zacznijmy od początku i spróbujmy wykonać działanie $\aleph_{\mathbf{o}} + \mathbf{1}$. Działanie to oznacza, że mamy zbiór $\mathbf{N}$ i powiększamy go o jeden element nie należący do niego. Wyobraźmy sobie, że tym elementem jest liczba $\mathbf{0}$. Parujemy teraz elementy zbioru $\mathbf{N}$ i otrzymanego:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1},\ \ \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{n} + \mathbf{1}.$$

Oznacza to, że są one równoliczne, a jako takie mają tę samą moc, dlatego

$$\aleph_{\mathbf{o}} + \mathbf{1} = \aleph_{\mathbf{o}}.$$

Zaskoczenie? Na pewno tak, bowiem w arytmetyce *skończonej* nigdy równość $\mathbf{n} + \mathbf{1} = \mathbf{n}$ nie zachodzi!

Powtarzając ostatnie rozumowanie widzimy, że dla każdej liczby naturalnej $\mathbf{n}$

$$\aleph_{\mathbf{o}} + \mathbf{n} = \aleph_{\mathbf{o}}.$$

A teraz najważniejszy przypadek – mamy dwa równoliczne nieskończone i przeliczalne zbiory $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ złożone z różnych elementów. Bierzemy zbiór $\mathbf{C}$ złożony ze wszystkich elementów, czyli

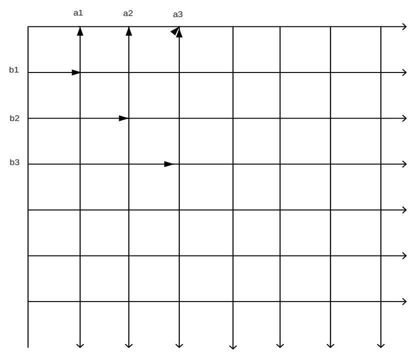
$$|\mathbf{C}| = \aleph_{\mathbf{o}} + \aleph_{\mathbf{o}}.$$

Czego możemy oczekiwać od wyniku tego działania? Na pierwszy rzut oka sytuacja nie jest oczywista – różni się w sposób zasadniczy od przedstawionej wyżej. Do opisania jej musimy zmienić rozumowanie, zaprezentowane po raz pierwszy przez Cantora. Przede wszystkim załóżmy, że $\mathbf{A} = \{\mathbf{a_n},\ \mathbf{n} \in \mathbf{N}\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b_m},\ \mathbf{m} \in \mathbf{N}\}$. Przez $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ oznaczmy zbiór, którego elementy są parami $(\mathbf{a_n}, \mathbf{a_m})$. Zauważmy, że zbiór $\mathbf{C}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Pokażemy teraz, że $\mathbf{N}$ jest równoliczny z $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Wyjaśnia to dobrze poniższy rysunek, gdzie elementy zbioru $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ utożsamiane są z węzłami siatki. Zasada przyporządkowania zaznaczona została na rysunku strzałkami.

Na przykład

$$\mathbf{1} \longrightarrow (\mathbf{b_1}, \mathbf{a_1}),\ \mathbf{2} \longrightarrow (\mathbf{b_2}, \mathbf{a_1}),\ \mathbf{3} \longrightarrow (\mathbf{b_2}, \mathbf{a_2}), \mathbf{4} \longrightarrow (\mathbf{b_1}, \mathbf{a_2}),\ \text{itd.}$$

Zauważmy, że każdej liczbie naturalnej odpowiada dokładnie jedna para i na odwrót, każdej parze dokładnie jedna liczba naturalna, co oznacza równoliczność tych zbiorów. Dlatego $\aleph_o + \aleph_o = \aleph_o$.



Rysunek 1: Ilustracja metody Cantora

Arytmetyka przedstawiona wyżej doczekała się swojej słynnej już ilustracji, związanej z Dawidem Hilbertem (1862–1943), która do literatury przedmiotu przeszła pod nazwą *Hotelu Hilberta*. Zainteresowanych odsyłam do licznych źródeł internetowych.[3]

[3] `https://www.google.pl/search?q=hotel+hilbert&biw=1366&bih=600&tbm=isch&imgil=8ja6MDmjCsh6bM`

3 Aspekt odległościowy

Zajmiemy się teraz problemem, który w swoim sformułowaniu wykorzystuje zwrot *nieskończenie blisko*. Przypuśćmy, że mamy zbiór przeliczalny $\mathbf{A}$. Jak wiemy, wtedy jego elementy możemy ponumerować, czyli ustawić w kolejności.

Mówimy wtedy, że mamy do czynienia z *ciągiem liczbowym*, co zapisujemy następująco

$$(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n}\in\mathbf{N}_0},\ \text{gdzie } \mathbf{N_0} \text{ oznacza podzbiór } \mathbf{N}.$$

Wtedy $\mathbf{a_n}$ nazywamy $\mathbf{n}$–tym *wyrazem* tego ciągu. W takim razie ciągi mogą być skończone albo nieskończone. Zjawisko, na które pragniemy zwrócić uwagę wymaga abyśmy dalej założyli, że ciąg $(\mathbf{a_n})$ jest nieskończony, np. $\mathbf{a_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}$ dla $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$. Interesują nas jego *asymptotyczne* własności, czyli zachowanie się nie jego początkowych wyrazów, a końcowych. Dokładniej wyrazy te są postaci

$$\mathbf{a_n},\ \text{dla } \mathbf{n} \geq \mathbf{n_o} \text{ dla pewnej liczby } \mathbf{n_o} > \mathbf{1}$$

i będziemy nazywali je *ogonem* ciągu. Na przykład $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}$ dla $\mathbf{n} \geq \mathbf{1000000}$ jest ogonem ciągu $(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}})$.

Aby zdefiniować tę asymptotykę potrzebujemy pojęcia *odległości*, w matematyce nazywanej *metryką*. Dla uproszczenia będziemy mówili tylko o odległości pomiędzy liczbami rzeczywistymi. Z definicji przyjmiemy, że jest to długość odcinka, którego końce wyznaczone są przez te liczby. Będziemy wtedy pisali

$$\mathbf{d}(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = |\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|,$$

gdzie $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}$ oznaczają końce tego odcinka.

Jeśli dla ciągu $(\mathbf{a_n})$ istnieje taka liczba $\mathbf{g}$, że dla pewnego ogona tego ciągu wszystkie wyrazy są tak bliskie liczby $\mathbf{g}$ jak chcemy, to będziemy mówili, że ciąg zachowuje się *asymptotycznie stabilnie.*

Oznaczymy przez $\varepsilon > \mathbf{0}$ miarę tej odległości. Jeśli dla wszystkich $\mathbf{n} \geq \mathbf{n_o}$, $\mathbf{d}(\mathbf{a_n}, \mathbf{g}) < \varepsilon$ (czyli dla pewnego ogona), to ciąg $(\mathbf{a_n})$ jest asymptotycznie stabilny. Wtedy zachowanie takie symbolicznie będziemy oznaczali przez $\mathbf{a_n} \longrightarrow \mathbf{g}$ i będziemy mówili, że ciąg ten jest *zbieżny.* Liczbę $\mathbf{g}$ będziemy nazywali jego *granicą.*

Zauważmy, że dla ciągu $(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}})$ taka liczba istnieje i jest równa $\mathbf{0}$. Biorąc bowiem dowolne $\varepsilon > \mathbf{0}$ (np. $\varepsilon = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1000000}}$), rozwiązaniem nierówności

$$\mathbf{d}\Big(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{0}\Big) = |\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} - \mathbf{0}| < \varepsilon$$

jest zbiór liczb naturalnych postaci $\mathbf{n} > \frac{\mathbf{1}}{\varepsilon}$, czyli np. $\mathbf{n} > \mathbf{1000000}$, co dokładnie oznacza, że zawsze taki ogon istnieje. Dlatego możemy napisać $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \longrightarrow \mathbf{0}$.

Zjawisko asymptotycznej stabilności ciągu ilustruje efekt tzw. *nieskończonego* zbliżania się wyrazów ciągu do jego granicy. Starożytni zjawiska tego nie dostrzegali i wcale nie dlatego, że do niczego nie było to im potrzebne – jak wiemy rozważane przez nich zagadnienia mogły by być rozwiązane lepiej gdyby tak nie było. Po prosto nie umieli sobie z nim poradzić, wpędzając się w niepotrzebne spekulacje kończące się kolejnymi paradoksami. Dopiero dociekania sir Isaaca Newtona nad problemem ruchu w kontekście *prędkości* i *przyspieszenia chwilowego* sprowadziły jego rozważania do problemu zjawiska *nieskończenie bliskich* sobie wielkości. Pozwoliło to Newtonowi odkryć podstawy *rachunku różniczkowego* i *całkowego*, co umożliwiło skierowanie matematyki na właściwą ścieżkę rozwoju. Co więcej, bez tych odkryć rozwój ten nigdy nie mógłby być możliwy!

4 Aspekt arytmetyczny

Ze szkoły dobrze wiemy, że jeśli mamy skończony zbiór liczb, to za pomocą działania artymetycznego *dodawania* możemy te liczby zsumować.

Dokładniej, jeśli $\mathbf{A} = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}\} \subset \mathbf{R}$, to

$$\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \ldots + \mathbf{a_n} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_j}.$$

Co więcej, działanie to możliwe jest do wykonania tylko w sytuacji kiedy dany zbiór jest skończony! A co w sytuacji kiedy zbiór $\mathbf{A}$ jest nieskończony?

Zaczniemy najpierw od przypadku kiedy $\mathbf{A}$ jest przeliczalny. Jak wiemy mamy wtedy nieskończony ciąg liczbowy $(\mathbf{a_n})$, np. $\mathbf{a_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}$. Na pewno umiemy obliczyć sumę jego początkowych wyrazów $\mathbf{S_n}$, gdzie

$$\mathbf{S_n} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_j}, \text{ dla } \mathbf{n} \geq \mathbf{2}.$$

Oczywiście nie jest to rozwiązaniem naszego problemu, ale daje nam narzędzie, które problem pozwala rozwiązać. Mianowicie to, że nie można zsumować nieskończonej ilości liczb używając dodawania arytmetycznego nie wyklucza sytuacji, że istnieje liczba rzeczywista, którą można dowolnie przybliżać arytmetycznymi sumami typu $\mathbf{S_n}$. Oczywiście termin *przybliżać* rozumiany jest tylko w jeden sposób – w sensie odległości. W takim razie, oznaczając tę liczbę przez $\mathbf{S}$, oczekujemy, że

$$\mathbf{S_n} \longrightarrow \mathbf{S}.$$

Ponieważ $\mathbf{S_n} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_j}$, liczba $\mathbf{S}$ jest wynikiem dwóch operacji:

1. sumowania arytmetycznego
2. granicy ciągu.

Dlatego oznaczając te dwa działania w postaci $\sum_{\mathbf{n}\geq\mathbf{1}}\mathbf{a_n}$ otrzymamy

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{n}\geq\mathbf{1}}\mathbf{a_n}.$$

Dalej liczbę $\mathbf{S}$ będziemy nazywali *sumą szeregu liczbowego*, który jest ciągiem $(\mathbf{S_n})$, a jego wyrazy nazywamy $\mathbf{n}$–tymi *sumami częściowymi*.

Na przykład dla ciągu $\mathbf{a_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}$ mamy:

$$\mathbf{S_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^2}} + \ldots + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}}{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}, \text{ i dlatego } \mathbf{S_n} \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Dlatego

$$\sum_{\mathbf{n}\geq\mathbf{1}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}} = \mathbf{1}.$$

Biorąc jednak ciąg $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)$ można pokazać, że nie istnieje liczba, którą można by z dowolną dokładnością przybliżać sumami początkowych wyrazów tego ciągu. Proszę spróbować dociec co jest tego przyczyną. Na koniec zauważmy jeszcze, że sumą szeregu powstałego z ciągu o wyrazach równych zero jest zero.

Przejdziemy teraz do przypadku zbioru nieskończonego, ale nieprzeliczalnego. Weźmy ponownie odcinek jednostkowy $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Jego długość równa jest oczywiście jeden. Spójrzmy teraz na ten zbiór inaczej. Składa się on z liczb, które przedstawiają tzw. *odcinki zdegenerowane*, czyli o jednakowych końcach. Zatem każdy z nich ma długość równo zero. W rozważanym przypadku widzimy, że suma zer równa jest jeden! Z punktu widzenia pojęcia szeregu rozumiemy przyczynę takiego stanu rzeczy - próbujemy sumować elementy zbioru nieprzeliczalnego metodą, której zakres stosowania kończy się na przypadku zbiorów przeliczalnych.

Aby sumowanie to przeprowadzić poprawnie potrzebny jest adekwatny do sytuacji sposób. Odkrył go, jak wspomnieliśmy wcześniej sir Isaac Newton – jest nim *rachunek całkowy.* W przypadku omawianym wyżej zasada sumowania przebiega według słynnego podstawowego twierdzenia rachunku całkowego, twierdzenia Riemanna–Cauchy'ego–Newtona–Leibniza

$$\int_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \mathbf{dx} = \mathbf{x}]_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} = \mathbf{1} - \mathbf{0} = \mathbf{1},$$

gdzie $\int$ jest symbolem *całki.* Należy zauważyć, że symbol ten powstał w wyniku rozciągnięcia symbolu sumowania $\sum$. Oczywiście teraz wynik sumowania jest już poprawny.

5 Podsumowanie

Traktując termin *nieskończoność* jako pretekst do dyskusji spróbowałem Państwu pokazać trzy kluczowe idee, które w sposób zasadniczy wpłynęły na rozwój matematyki. Oczywiście musiało to też mieć przełożenie na rozwój cywilizacji ludzkiej. Przypomnijmy te koncepcje:

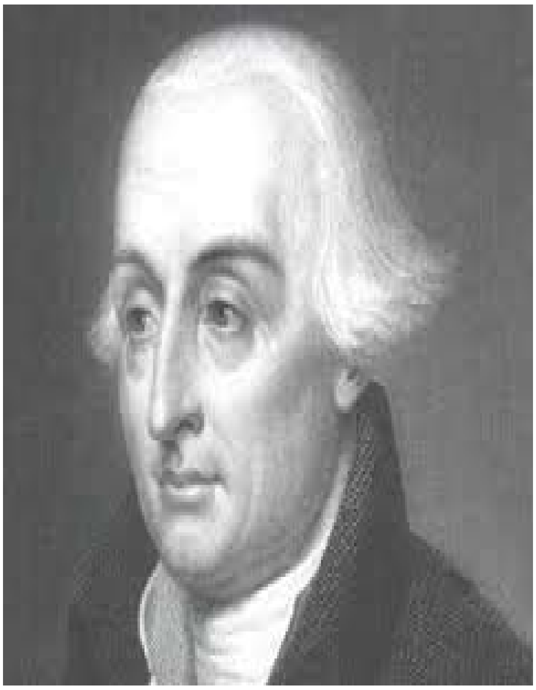
- *liczba kardynalna* jako uogólnienie liczebności zbioru skończonego;
- pojęcie *granicy ciągu* jako sprecyzowanie wielkości *nieskończenie bliskich*;
- *zasada sumowania* elementów zbioru przeliczalnego, jako uogólnienie sumy arytmetycznej.

Każda z tych idei ma swoją historię i wymagała długiego czasu jej wdrażania. Były to przedsięwzięcia wielopokoleniowe i nie sposób wymienić wszystkich, którzy przyczynili się do ich powstania. Niech mi jednak wolno będzie, w ujęciu chronologicznym, przypomnieć tych najważniejszych, którzy dostąpili zaszczytu zasiadania w Areopagu Matematyków:


Rysunek 2: I. Newton (1642–1726) G.W. Leibniz (1646–1716)

Rysunek 3: L. Euler (1707–1783) J.R. d'Alembert (1717–1783)

Rysunek 4: J.L. Lagrange (1736–1813) G.F. Gauss (1777–1855)


Rysunek 5: A.L. Cauchy (1789–1857) K. Weierstrass (1815–1897)


Rysunek 6: P.G.L. Dirichlet (1805 – 1859 B. Riemann (1826–1866)


Rysunek 7: J.W.R. Dedekind (1831–1916) G. Cantor (1845–1918)


Rysunek 8: D. Hilbert (1862–1943) E. Zermelo (1871–1953)

Rysunek 9: Hotel Hilberta

Literatura

[1] Amir D. Aczel, *Wielkie Twierdzenie Fermata* Prószyński i S–ka, Warszawa 1998.

[2] Arystoteles, *Physics part 6*, http://classics.mit.edu.Aristotle/physics6.vi.html.

[3] C.B. Boyer, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, Warszawa 1969.

[4] C.B. Boyer, U.C. Merzbuch, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, INC. 1991.

[5] D.M. Burton, *The History of Mathematics: An Introduction, Sixth Edition*, McCraw–Hill Primis, 2006.

[6] R. Courant, H. Robbins, *Co to jest Matematyka?*, PWN, Warszawa 1962.

[7] T. Crilly, *50 mathematical ideas you really need to know*, Quercus Publishing Plc 2007.

[8] J.W. Dauben, *Georg Cantor His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton Univeristy Press, 1979.

[9] H. Eves, *Great moments in mathematics (before 1650)*, Dolciani Mathematical Expositions Series 1983.

[10] H. Eves, *Great moments in mathematics (after 1650)*, Dolciani Mathematical Expositions Series 1983.

[11] W.B. Ewald, *From Kant to Hilbert, A source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. 1, CLavendor Press, Oxford 1996.

[12] W.B. Ewald, *From Kant to Hilbert, A source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. 2, CLavendor Press, Oxford 1996.

[13] T.G. Faticoni, *The mathematics of infinity, A Guide to Great Ideas*, Wiley Interscience, 2006.

[14] E. Gregersen, *The Britannica Guide to The History of Mathematics*, Britannica Educational Publishing 2011.

[15] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* vol3, Oxford University Press, 1972.

[16] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1977.

[17] M. Livio, *Is GOD a mathematicien?* Simon & Schuster, 2009.

[18] J.R. Newman, *The World of Mathematics vol. 1–4*, Simon and Schuster New York 1956.

[19] H. Rademacher, O. Toeplitz, *The enjoyment of mathematics*, Princeton, 1957.

[20] C. Reid, *Hilbert–Courant*, Springer–Verlag 1986.

[21] C. Reid, *From zero to infinity, what makes numbers interesting*, A.K. Peters, Ltd. Wellesley 2006.

[22] C. Reid, *A long way from Euclid*, Thomas Y. Crowell Company, New York 1963.

[23] R. Rębowski, *Matematyka dyskretna dla informatyków*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, 2008.

[24] E. Robson, J. Stedall, *The Oxford Handbook of The History of Mathematics*, Oxford University Press 2000.

[25] B. Russell, *Principles of Mathematics*, Taylor & Francis e–Library, 2009.

[26] J.D. Stein, *Cosmic Numbers The Numbers That Define Our Universe*, Basic Books, New York 2011.

[27] I. Stewart, *Visions of infinity*, Basic Books, New York 2013.

[28] M.B.W. Tent, *Gotfried Wilhelm Leibniz The Polymath Who Brought US Calculus*, CRC Press, 2012.

[29] M.B.W. Tent, *The Prince of Mathematics Carl Fredrich Gauss*, A K Peters, Ltd. Wellesley, 2006.