Rozdział 1

Zbiory i rodziny zbiorów

1.1 Wprowadzenie teoretyczne i przykłady

Zbiory definiujemy poprzez określenie ich elementów. Dwa zbiory, które mają te same elementy, uważamy za identyczne.

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Piszemy $A \subset B$ (zbiór A zawiera się w zbiorze B), jeżeli każdy element zbioru A należy również do zbioru B.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Podstawowe działania na zbiorach to: suma, iloczyn i różnica ($A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$), które definiujemy nastepująco:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B,$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B,$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Zbiór A^C nazywamy dopełnieniem zbioru A.

$$x \in A^C \Leftrightarrow x \notin A$$

Moc zbioru $|A|$ określa ilość elementów danego zbioru.

Iloczyn kartezjański zbiorów A i B ($A \times B$) to taki zbiór par uporządkowych (a, b), że $a \in A \wedge b \in B$.

Zbiór, którego elmentami są zbiory, nazywamy *rodziną zbiorów.*

Rodzina $\mathcal{A}$ jest rodziną indeksowaną, jeżeli istnieje zbiór indeksów T taki, że każdemu indeksowi $t \in T$ jest przyporządkowany w sposób jednoznaczny jeden element A_t rodziny $\mathcal{A}$.

Będziemy wtedy pisali $\mathcal{A} = \{A_t,\ t \in T\}$.

Na rodzinie $\mathcal{A} = \{A_t, t \in T\}$ można wykonywać działania mnogościowe:

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \{x \in X : \exists_{t\in T}\ x \in A_t\},$$

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \{x \in X : \forall_{t\in T}\ x \in A_t\}.$$

Dla danego zbioru Ω niech Σ oznacza rodzinę złożoną z podzbiorów Ω, która ma następujące własności:

1. zawiera zbiór pusty,
2. zamknięta jest na branie dopełnienia,
3. zamknięta jest na branie sum przeliczalnych, czyli

$$\forall_{n\in \mathbf{N}_o}\ A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n\in \mathbf{N}_o} A_n \in \Sigma$$

dla dowolnego podzbioru niepustego $\mathbf{N}_o \subset \mathbf{N}$.

Dalej rodzinę Σ będziemy nazywali σ-*algebrą zdarzeń*, zbiór Ω będziemy nazywali *przestrzenią zdarzeń elementarnych.*
Zdarzenie pewne oznaczamy przez Ω, a *zdarzenie niemożliwe* przez $\emptyset$. *Zdarzeniem przeciwnym* do A nazwiemy jego dopełnienie A^C.

Zadanie 1.1.1 *Niech*
A będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 3,
B – zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 5,
C – zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 6.
Znaleźć zbiory:

$A \cup B,\ A \cup C,\ B \cup C,\ A \cup B \cup C,\ A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C,\ A \cap B \cap C,$

$$B \setminus A,\ A \setminus C,\ C \setminus A.$$

Rozwiązanie

Podane w zadaniu zbiory są postaci:

$$A = \{3, 6, 9, 12, ...\},\ B = \{5, 10, 15, 20, ...\},\ C = \{6, 12, 18, 24, ...\}.$$

Sumę dwóch zbiorów stanowią wszystkie elementy, które należą do jednego lub drugiego zbioru, zatem $A \cup B$ stanowią liczby podzielne przez 3 lub podzielne przez 5, $B \cup C$ – podzielne przez 5 lub podzielne przez 6, $A \cup C$ – podzielne przez 3 lub podzielne przez 6.

$$A \cup B = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, ...\},\ B \cup C = \{5, 6, 10, 12, 15, 18, 20, ...\},$$

$$A \cup C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}.$$

Zbiór C zawiera się w zbiorze A (wszystkie liczby podzielne przez 6 są podzielne również przez 3 – wynika to faktu, że 3 jest dzielnikiem 6), więc sumę tych zbiorów stanowi cały zbiór A. $A \cup C = A$, zatem $A \cup B \cup C$ to zbiór liczb podzielnych przez 3 lub przez 5.

$$A \cup B \cup C = A \cup B = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, ...\}.$$

Iloczyn dwóch zbiorów stanowią wszystkie elementy, które należą do jednego oraz do drugiego zbioru. Do zbioru $A \cap B$ należą liczby podzielne przez 3 i 5 (będące wielokrotnością NWW(3,5) = 15), do zbioru $B \cap C$ – podzielne przez 5 i 6, czyli podzielne przez NWW(5,6) = 30, a do zbioru $A \cap C$ – podzielne przez 3 oraz 6 (NWW(3,6)=6).
Ponownie korzystamy z tego, że zbiór C zawiera się w zbiorze A, dlatego iloczyn tych zbiorów stanowi zbiór C.

$$A \cap B = \{15, 30, 45, 60, ...\},\ B \cap C = \{30, 60, 90, 120, ...\},$$

$$A \cap C = \{6, 12, 18, 24, ...\},$$

$$A \cap B \cap C = B \cap C = \{30, 60, 90, 120, ...\}.$$

Zgodnie z określeniem różnicy dla dwóch zbiorów wybieramy te elementy, które należą do zbioru pierwszego i nie należą do drugiego. Zbiór $B \setminus A$ stanowią liczby podzielne przez 5, ale niepodzielne przez 3, $A \setminus C$ – podzielne przez 3 oraz niepodzielne przez 6, $C \setminus A$ – podzielne przez 6 i niepodzielne przez 3.

$$B \setminus A = \{5, 10, 20, 25, 35, , ...\},\ A \setminus C = \{3, 9, 15, 21, 27, ...\}.$$

Zbiór C zawiera się w zbiorze A, zatem $C \setminus A = \emptyset$.

Zadanie 1.1.2 *Udowodnić następującą równoważność:*
$(B \setminus A) \cup A = B \Leftrightarrow A \subset B.$

Rozwiązanie

Niech x oznacza zdarzenie elementarne.
$x \in (B \setminus A) \cup A \Leftrightarrow (x \in B \ \wedge \ x \notin A) \vee x \in A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in B \ \vee \ x \in A) \wedge (x \in A^C \ \vee \ x \in A) \Leftrightarrow (x \in (A \cup B)) \vee x \in \Omega \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B)$
Otrzymujemy zatem równość $A \cup B = B$, która jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subset B$.

Zadanie 1.1.3 *Zbadano grupę 50 osób i okazało się, że 43 osoby uprawiają sport, 19 osób gra w gry strategiczne, a 20 gra w gry losowe. Wiedząc, że wszyscy grają w jakieś gry, wykazać, że co najmniej 32 osoby spośród badanych uprawia więcej niż jeden rodzaj gier.*

Rozwiązanie

Niech:
A – zbiór osób uprawiających sport;
B – zbiór osób grających w gry strategiczne;
C – zbiór osób grających w gry losowe.

Z danych w zadaniu wynika, że
$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 50.$
Przekształcamy do postaci:
$|A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C| - 50 = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$. Zbiór $A \cap B \cap C$ nie musi być zbiorem pustym, zatem
$|A| + |B| + |C| - 50 \leq |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|.$
Wykorzystując dane w zadaniu mamy,
$43 + 19 + 20 - 50 \leq |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$
$32 \leq |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$

Zadanie 1.1.4 *Niech* $\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. *Znaleźć najmniejszą* σ*-algebrę* $\mathcal{S}$ *zawierającą rodzinę* $\mathcal{R} = \{\{0\}, \{2, 4, 6\}\}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że ponieważ Ω jest zbiorem skończonym, warunek zamknięcia rodziny na branie sum przeliczalnych oznacza zamknięcie tej rodziny na branie tylko sumy mnogościowej.

Oczywiście rozważana rodzina nie jest σ-algebrą. Aby znaleźć najmniejszą σ-algebrę zawierającą $\mathcal{R}$, należy ją powiększyć o brakujące zbiory. Wprost z definicji wynika, że musi to być zbiór pusty oraz dopełnienia elementów tej rodziny. W wyniku powiększenia dostaniemy wtedy rodzinę

$$\{\emptyset,\ \{0\},\ \{2,\ 4,\ 6\},\ \Omega,\ \{2,\ 4,\ 6,\ 8\},\ \{0,\ 8\}\}.$$

Zauważmy, że powstała rodzina dalej nie jest σ-algebrą – nie jest zamknięta na branie sum mnogościowych. Należy ją uzupełnić o zbiór

$$\{0\} \cup \{2,\ 4,\ 6\} = \{0,\ 2,\ 4,\ 6\}$$

i jego dopełnienie $\{8\}$. Z konstrukcji wynika, że tak powstała rodzina $\mathcal{S}$ jest już σ-algebrą. Pozostało uzasadnić, że jest najmniejszą rodziną o tej własności.
W tym celu weźmy σ-algebrę $\mathcal{A}$ zawierającą rodzinę $\mathcal{R}$. Z definicji wynika, że musi ona zawierać również naszą powiększoną rodzinę, która jest σ-algebrą, co kończy dowód.

1.2 Zadania

Zadanie 1.2.1 *Niech*
A będzie zbiorem punktów (x, y), dla których $x^2 + y^2 < 4$,
B – zbiorem punktów (x, y), dla których $x^2 + y^2 < 9$,
C – zbiorem punktów (x, y), dla których $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 < 1$.
Znaleźć zbiory:

$$A \cup B,\ A \cup C,\ B \cup C,\ A \cup B \cup C,\ A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C,\ A \cap B \cap C,$$

$$A \setminus B,\ \ B \setminus A,\ \ A \setminus C.$$

Zadanie 1.2.2 *W loterii znajdują się losy puste i wygrywające. Kupujemy trzy losy. Niech*
A oznacza zdarzenie: dokładnie jeden los wygrywa,
B – co najwyżej jeden los wygrywa,
C – co najmniej jeden los wygrywa.
Wyjaśnić, co oznaczają zdarzenia A^C, B^C, C^C, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $B^C \cap C^C$.

Zadanie 1.2.3 *Niech A będzie zbiorem tych studentów Twojej grupy, których nazwisko zaczyna się od litery K,M lub P, B – zbiorem tych, którzy mają trójkę z matematyki, a C – zbiorem tych, którzy otrzymują stypendium za wyniki w nauce. Zapisać za pomocą działań na zbiorach A, B, C następujące zbiory studentów:*

1. *zbiór studentów, których nazwisko zaczyna się od litery K,M lub P, mają trójkę z matematyki oraz otrzymują stypendium za wyniki w nauce,*
2. *zbiór tych studentów, których nazwisko zaczyna się od litery K,M lub P oraz mają trójkę z matematyki lub otrzymują stypendium za wyniki w nauce,*
3. *zbiór tych studentów, których nazwisko nie zaczyna się od litery K,M lub P, mają trójkę z matematyki i nie otrzymują stypendium za wyniki w nauce,*
4. *zbiór tych studentów, których nazwisko zaczyna się od litery K,M lub P, nie mają trójki z matematyki ani nie otrzymują stypendium za wyniki w nauce.*

Zadanie 1.2.4 *Korzystając z praw de Morgana, zapisz* $A \cap B$ *wyłącznie przy pomocy operacji sumy i dopełnienia.*

Zadanie 1.2.5 *Dane są zbiory* $A = \{a, b, c\}$ *oraz* $B = \{1, 2\}$. *Wyznaczyć* $A \times B$ *oraz* $B \times A$.

Zadanie 1.2.6 *Udowodnić, że jeśli zbiór* A *ma* n *elementów, zbiór* B *ma* m *elementów, to* $A \times B$ *ma* $n \cdot m$ *elementów.*

Zadanie 1.2.7 *Zbiory* A *i* B *są zbiorami zawartymi w pewnej 20-elementowej przestrzeni. Wiemy, że zbiór* A *ma 7 elementów, zbiór* B *– 8 elementów, a ich część wspólna ma 3 elementy. Z ilu elementów składają się zbiory:* $A \cup B$, $A^C \cup B^C$, $A \setminus B$, $A^C \cap B$*?*

Zadanie 1.2.8 *Niech* $\Omega = [-1, 1]$. *Znaleźć najmniejszą* σ*-algebrę* $\mathcal{S}$ *zawierającą rodzinę* $\mathcal{R} = \{[-1, -\frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, 0]\}$.

Zadanie 1.2.9 *Niech* $X = [0, 1]$ *będzie przestrzenią. Dane są zbiory* $A = [0, \frac{1}{2})$ *oraz* $B = (\frac{1}{4}, 1]$.

1. *Wyznaczyć zbiory* $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, A^C, B^C.
2. *Uzupełnić rodzinę* $\mathcal{A} = \{A, B\}$ *tak, aby była algebrą.*

Zadanie 1.2.10 *Ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *losujemy bez zwracania kolejno trzy cyfry i tworzymy liczbę trzycyfrową w ten sposób, że pierwsza wylosowana cyfra oznacza liczbę setek, druga – liczbę dziesiątek i trzecia – liczbę jedności. Za zdarzenie elementarne przyjmujemy liczbę w ten sposób uzyskaną. Wypisać wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające danemu zdarzeniu, jeśli zdarzenie polega na tym, że otrzymana liczba jest:*

1. *wielokrotnością liczby 25;*
2. *mniejsza od 200 i podzielna przez 5;*

3. *kwadratem pewnej liczby naturalnej;*

4. *kwadratem pewnej liczby naturalnej lub jest wielokrotnością liczby 25;*

5. *kwadratem pewnej liczby naturalnej i wielokrotnością liczby 25;*

6. *wielokrotnością liczby 25 i nie jest kwadratem żadnej liczby naturalnej;*

7. *kwadratem pewnej liczby naturalnej i nie jest wielokrotnością liczby 25.*

Zadanie 1.2.11 *Dane są 4 zdarzenia losowe A, B, C i D przestrzeni wszystkich zdarzeń elementarnych Ω. Zapisać za pomocą odpowiednich działań zdarzenie:*

1. *E polegające na tym, że wystąpiły tylko zdarzenia A i B;*

2. *F polegające na tym, że nie wystąpiło żadne zdarzenie;*

3. *G polegające na tym, że wystąpiło zdarzenie A i nie wystąpiły zdarzenia B, C, D;*

4. *H polegające na tym, że wystąpiło tylko zdarzenie spośród zdarzeń A, B, C, D.*

Zadanie 1.2.12 *Dane są zdarzenia losowe A,B i C w przestrzeni wszystkich zdarzeń elementarnych Ω. Wykazać równości:*

1. $A - (B \cup C) = (A - B) - C$;

2. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

Zadanie 1.2.13 *Wykonujemy trzykrotny rzut symetryczną monetą. Zdarzenie elementarne to trójka (x, y, z), gdzie $x, y, z \in \{o,r\}$, gdzie o oznacza, że wyrzuciliśmy orła, r – wyrzuciliśmy reszkę. Niech A_i będzie zdarzeniem elementarnym polegającym na tym, że reszka wypadła tylko w i-tym rzucie, $i = \{1, 2, 3\}$. Wyznaczyć: Ω, A_1, A_2, A_3.*
Co oznacza zdarzenie:

1. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

2. $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;

3. $A_1^C \cup A_2^C \cup A_3^C$;

4. $A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C$?

Zadanie 1.2.14 *Rzucamy dwa razy symetryczną monetą. W sytuacji gdy otrzymamy dwukrotnie tę samą stronę monety, rzucamy po raz trzeci. Za zdarzenie elementarne uważamy uporządkowane dwójki lub trójki wyników poszczególnych rzutów. Wyznaczyć Ω.*

Zadanie 1.2.15 *Z talii 52 kart wybieramy 4. Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowaliśmy co najmniej jednego asa, B – wylosowaliśmy co najwyżej jednego asa czarnego, C – wylosowaliśmy dwa asy.*
Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia. Co oznaczają zdarzenia: $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C^C$, $A \cup B \cup C$, $A^C \cap B^C$*?*

Zadanie 1.2.16 *Z badań statystycznych wynika, że w pewnej grupie studentów 50% gra w koszykówkę, 60% w siatkówkę, 50% w piłkę nożną, 30% w koszykówkę oraz siatkówkę, 20% w siatkówkę i piłkę nożną, 30% w koszykówkę i piłkę nożną. 10% studentów uprawia wszystkie trzy dyscypliny sportowe. Jaki procent studentów uprawia dokładnie dwie gry zespołowe? Jaki procent nie uprawia żadnej gry?*

Zadanie 1.2.17 *W pewnej wsi mieszka 300 osób, z których każdy śpiewa, tańczy lub gra na gitarze. Połowa grających na gitarze tańczy, połowa tańczących śpiewa, a połowa śpiewających gra na gitarze. Wiemy, że żaden z grających na gitarze nie śpiewa i tańczy. Ile osób śpiewa, tańczy, a ile gra na gitarze?*

Zadanie 1.2.18 *Z badań statystycznych wynika, że wśród 200 ankietowanych 130 posiada psa, 80 – kota, a 53 – rybki. Nikt nie posiada wszystkich trzech zwierząt, ale mniej niż 40 spośród ankietowanych posiada dwa zwierzątka. Czy wyniki ankiety są rzetelne?*

Zadanie 1.2.19 *Wybieramy losowo studenta drugiego roku. Niech zdarzenie A polega na tym, że jest to kobieta, B – wybrana osoba uczęszcza na lektorat z języka angielskiego, C – wybrany student jest mieszkańcem Legnicy.*
Opisać słownie zdarzenia: $A \cap B^C$, $A \cap B \cap C^C$.
Przy jakich warunkach będzie zachodzić równość, że $A \cap B = A$*? Kiedy zachodzi równość* $A^C = B$*?*

Zadanie 1.2.20 *Z odcinka* $[0, 2]$ *wybieramy losowo i niezależnie dwa punkty. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że odległość między nimi jest mniejsza od 1. Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia. Opisać zdarzenie A.*

Zadanie 1.2.21 *Z odcinka* $[0, k]$ *wybieramy losowo i niezależnie punkty x i y. Niech A – zdarzenie polegające na tym, że* $x^2 + y^2 > \frac{k^2}{4}$*, B – zdarzenie, że funkcja* $ln(x^2 + y^2 - k)$ *jest dobrze określona.*

1. *Opisać A, B i* Ω.

2. *Wyznaczyć* $|A|$, $|B|$ *i* $|\Omega|$.

Rozdział 2

Elementy kombinatoryki oraz techniki zliczania

2.1 Wprowadzenie teoretyczne i przykłady

Niech dane będą zbiory:

$$A_1 = \{a_1, a_2, ..., a_{n_1}\},\ |A_1| = n_1$$

$$A_2 = \{b_1, b_2, ..., b_{n_2}\},\ |A_2| = n_2$$

$$\vdots$$

$$A_k = \{p_1, p_2, ..., p_{n_k}\},\ |A_k| = n_k$$

Ilość ciągów $(a_{j_1}, b_{j_2}, ..., p_{j_k})$ takich, że wyraz pierwszy należy do A_1, drugi do A_2, k-ty do A_k da się wyznaczyć, korzystając z twierdzenia:

Twierdzenie 2.1.1 *(Zasada wielokrotnego wyboru)*
Liczba k-elementowych ciągów, takich że $a_{j_1} \in A_1,\ b_{j_2} \in A_2, ..., x_{j_k} \in A_k$, *jest równa* $|A_1| \cdot |A_2| \cdot ...|A_k| = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.

Definicja 2.1.1 *Niech dany będzie zbiór* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. *Każdą funkcję, która liczbie naturalnej ze zbioru* $\{1, 2, ..., k\}$ *przyporządkowuje dokładnie jeden element* a_m *ze zbioru* A, *nazywamy k-elementową wariacją z powtórzeniami zbioru* A.

K-elementowa wariacja z powtórzeniami zbioru A to k-krotny wybór po jednym elemencie ze zwracaniem ze zbioru A.

Twierdzenie 2.1.2 *Liczba k-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest równa* $|V_n^k| = n^k$.

Definicja 2.1.2 *Dla danego zbioru* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *każdą różnowartościową funkcję* $f : \{1, 2, ..., k\} \to \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ $(k \leq n)$ *nazywamy k-elementową wariacją bez powtórzeń zbioru A.*

K-elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru A to k-krotny wybór bez zwracania jednego elementu ze zbioru A.

Twierdzenie 2.1.3 *Liczba k-elementowych wariacji bez powtórzeń elementów zbioru n-elementowego* $(k \leq n)$ *wynosi* $|W_n^k| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Definicja 2.1.3 *Permutacją zbioru* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *nazywamy każdą funkcję różnowartościową* $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. *Innymi słowy – permutacja zbioru to każde uporządkowanie elementów tego zbioru.*

Twierdzenie 2.1.4 *Liczba permutacji zbioru n-elementowego jest równa* $|P_n| = n!$.

Definicja 2.1.4 *K-elementową kombinacją n-elementowego zbioru* $(0 \leq k \leq n)$ *nazywamy dowolny k-elementowy podzbiór tego zbioru.*

Twierdzenie 2.1.5 *Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego jest równa* $|C_n^k| = \binom{n}{k}$.

Definicja 2.1.5 *Niech dany będzie n-elementowy zbiór, w którym mamy* k_1 *elementów typu* a_1, k_2 *elementów typu* a_2,...,k_m *typu* a_m, *przy czym elementy tego samego typu są nierozróżnialne,* $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$. *Każde uporządkowanie tego zbioru nazywamy permutacją z powtórzeniami tego zbioru.*

Twierdzenie 2.1.6 *Liczba permutacji z powtórzeniami* k_1 *elementów typu* a_1, k_2 *typu* a_2,...,k_m *typu* a_m $(k_1 + k_2 + ... + k_m = n)$ *jest równa* $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}$.

Definicja 2.1.6 *K-elementową kombinacją z powtórzeniami zbioru n-elementowego nazywamy każdy ciąg* $(k_1, k_2, ..., k_n)$ *taki, że* $k_j \geq 0$ *i całkowite oraz* $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$.

Twierdzenie 2.1.7 *Liczba k-elementowych kombinacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest równa* $\binom{n+k-1}{k}$.

Zadanie 2.1.1 *Studentka ma w szafie jedną bluzkę żółtą i dwie zielone oraz trzy spódnice zielone i dwie żółte. Na ile sposobów może się ubrać, tak aby bluzka oraz spódnica były tego samego koloru?*

Rozwiązanie

Możemy zauważyć, że studentka ma do wyboru dwa zestawy ubioru: żółta bluzka i żółta spódnica lub zielona bluzka i zielona spódnica. Każda z opisanych możliwości da się wyliczyć z wykorzystaniem reguły mnożenia. Zatem mamy łącznie: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$ możliwości.

Zadanie 2.1.2 *Ile możemy otrzymać różnych wyników podczas jednoczesnego rzutu kostką i monetą?*

Rozwiązanie

Wynik doświadczenia opisany jest przez parę (wynik rzutu kostką, wynik rzutu monetą).
A_1 – zbiór możliwych wyników podczas rzutu kostką, $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
A_2 – zbiór możliwych wyników podczas rzutu monetą, $A_2 = \{O, R\}$
Mamy zatem $|A_1| \cdot |A_2| = 6 \cdot 2 = 12$ różnych wyników.

Zadanie 2.1.3 *Rzucamy czterema monetami. Ile istnieje wszystkich możliwych wyników rzutu?*

Rozwiązanie

Mamy dwa możliwe wyniki rzutu pojedynczą monetą – $n = 2$, zaś liczba monet $k = 4$. Zatem liczba wszystkich wyników rzutu czterema monetami wynosi $|W_n^k| = n^k = 2^4 = 16$.

Zadanie 2.1.4 *W urnie znajdują się ponumerowane kule $s_1, s_2, ..., s_9$. Zbiór kul oznaczmy $Z_9 = \{s_1, s_2, ..., s_9\}$. Z urny losujemy trzy kule bez zwracania i tworzymy w ten sposób liczby trzycyfrowe. Ile takich liczb możemy uzyskać?*

Rozwiązanie

W wyniku doświadczenia tworzymy trzyelementowe ciągi liczb, przy czym ciągi (s_1, s_2, s_3),(s_2, s_1, s_3) są różne, choć zawierają te same elementy. Utworzone w ten sposób ciągi to trzyelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru Z_9. Zatem liczba tych wariacji wynosi $|W_9^3| = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Zadanie 2.1.5 *W urnie znajdują się ponumerowane kule $s_1, s_2, ..., s_9$. Zbiór kul oznaczmy $Z_9 = \{s_1, s_2, ..., s_9\}$. Z urny losujemy trzy kule po jednej kuli, wrzucając po każdym losowaniu z powrotem do urny wylosowaną kulę. Wylosowane numery kul zapisujemy w kolejności losowania. Ile różnych liczb uzyskamy w ten sposób?*

Rozwiązanie

W wyniku losowania tworzymy trzyelementowe ciągi liczb, przy czym ciągi (s_1, s_2, s_3),(s_2, s_1, s_3) są różne, choć zawierają te same elementy. Kula po każdym losowaniu wraca do urny, więc możliwe jest uzyskanie liczby, w której cyfry będą się powtarzać (np. (s_6, s_6, s_6)). Utworzone w ten sposób ciągi to trzyelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru Z_9. Liczba wszystkich wariacji trzyelementowych zbioru Z_9 jest równa $|V_9^3| = 9^3 = 729$.

Zadanie 2.1.6 *W przedstawieniu przygotowywanym przez kółko teatralne bierze udział trzech chłopców i cztery dziewczynki. Mamy do obsadzenia siedem ról.*

1. *Na ile sposobów zostaną rozdzielone role, gdy nie ma znaczenia płeć młodego aktora?*
2. *Na ile sposobów rodzielimy trzy role męskie i cztery kobiece pomiędzy biorących udział?*

Rozwiązanie

1. Nie mamy podziału na role w zależności od płci, zatem każdy może odegrać każdą rolę, ale jedna osoba nie może odtwarzać dwóch ról. Mamy zatem łacznie $7! = 5040$ możliwości.
2. Role męskie możemy rodzielić na $3!$ sposobów, a role kobiece na $4!$ sposobów. Ponieważ obsadę meską możemy zestawić z dowolną obsadą kobiecą, mamy więc $3! \cdot 4! = 12 \cdot 48 = 576$ możliwości.

Zadanie 2.1.7 *Mamy k kul i rozmieszczamy je w n komórkach. Kule, o których jest mowa w zadaniu, są nierozróżnialne. Na ile sposobów można to zrobić?*

Rozwiązanie

Rozmieszczenie tych kul jest wyznaczone przez podanie liczby kul w komórkach, czyli ciąg $(k_1, k_2, ..., k_n)$, gdzie k_i – liczba kul w komórce o i-tym numerze. Nie jest istotne, w jakiej kolejności są rozmieszczone kule w danej komórce, istotna jest natomiast ich liczba.

Mamy $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$, $k_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$. Dwa rozmieszczenia są różne, gdy odpowiednie ciągi $(k_1, k_2, ..., k_n)$ nie są identyczne.

Rozpatrujemy k-elementowe kombinacje z powtórzeniami zbioru $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Kombinacji $(k_1, k_2, ..., k_n)$ przyporządkujemy rozmieszczenie zadane tym samym ciągiem, tzn. k_1 kul w 1. komórce, k_2 kul w 2. komórce itd.

Jeśli w kombinacji z powtórzeniami występuje k_j elementów a_j, tzn., że w komórce o numerze j jest k_j kul. Przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne, więc liczba różnych rozmieszczeń jest równa liczbie kombinacji z powtórzeniami, czyli $\binom{n+k-1}{k}$.

Zadanie 2.1.8 *Z cyfr* $1, 2, 2, 3, 4, 4, 4$ *tworzymy liczby siedmiocyfrowe. Ile różnych liczb możemy tak zrealizować?*

Rozwiązanie

Bezpośrednio ze wzoru na liczbę permutacji n-elementowych z powtórzeniami mamy $\frac{7!}{2!\cdot 3!} = 420$.

Zadanie 2.1.9 *Ile uzyskamy różnych wyników przy rzucie pięcioma nierozróżnialnymi monetami?*

Rozwiązanie

W zadaniu tym wykorzystamy kombinacje z powtórzeniami, gdzie $n = 2$, $k = 5$: $\binom{n+k-1}{k} = \binom{2+5-1}{5} = 6$.

2.2 Zadania

Zadanie 2.2.1 *W kolejce stoi 5 dziewcząt i 5 chłopców. Na ile sposobów mogą oni ustawić się w kolejce, jeśli:*

1. *dziewczęta stoją przed chłopcami;*
2. *w kolejce żadnych dwóch chłopców nie stoi obok siebie;*
3. *nie ma znaczenia kolejność osób?*

Zadanie 2.2.2 *Ile różnych słów mających sens lub nie można utworzyć z liter słowa:*

1. *REGUŁA;*
2. *ZADANIA;*
3. *TATA?*

Zadanie 2.2.3 *Stonoga ma 50 par różnych butów. Rozróżnia tylko buty lewe od prawych. Na ile sposobów stonoga może ubrać buty?*

Zadanie 2.2.4 *Pewna restauracja reklamuje się w sposób następujący: ,,Posiadamy ponad milion zestawów obiadowych". Sprawdzono, że w rzeczywistości było tam 20 zup, 10 drugich dań, 12 przystawek, 20 deserów i 25 gatunków wina. Czy reklama tej restauracji jest błędna?*

Zadanie 2.2.5 *Mały Karolek wkłada buty. Posiada 6 par butów i zawsze kieruje się zasadami:*

1. *nigdy nie wkłada lewego buta na prawą nogę i odwrotnie;*
2. *nigdy nie wkłada dwóch butów z tej samej pary.*

Na ile sposobów może włożyć buty na obie nogi?

Zadanie 2.2.6 *W sali wykładowej jest 150 miejsc. Na wykład przyszło 42 studentów. Na ile sposobów mogą zająć miejsca na tej sali?*

Zadanie 2.2.7 *Ile różnych liczb czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach można utworzyć, mając do dyspozycji:*

1. *cyfry: 1,2,3,4,5,6,7;*
2. *cyfry: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9?*

Zadanie 2.2.8 *Egzamin z matematyki składa się z 15 pytań testowych. Przy każdym pytaniu podane są trzy odpowiedzi i wiemy, że tylko jedna spośród podanych jest prawidłowa. Na ile sposobów możemy dokonać wyboru odpowiedzi na egzaminie, zakładając, że:*

1. *nie zostaną nam przydzielone punkty ujemne za błędną odpowiedź, więc można zawsze zakreślić jedną odpowiedź;*
2. *za błędną odpowiedź są przydzielane punkty ujemne, więc można nie zakreślać żadnej odpowiedzi?*

Zadanie 2.2.9 *Ile jest liczb siedmiocyfrowych, które są palindromiczne?*

Uwaga 2.2.1 *Liczba jest palindromiczna, jeśli czytana wspak jest tą samą liczbą.*

Zadanie 2.2.10 *Mamy n przedmiotów. Na ile sposobów możemy rozdzielić te przedmioty:*

1. *pomiędzy 3 osoby (przyjmujemy podział skrajnie niesprawiedliwy – tzn. wszystkie przedmioty mogą trafić do jednej osoby);*
2. *na 3 grupy?*

Zadanie 2.2.11 *Wykazać, że* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Zadanie 2.2.12 *Ile istnieje podzbiorów*

1. *trzyelementowych,*
2. *czteroelementowych,*
3. *siedmioelementowych*

zbioru dziesięcioelementowego?

Zadanie 2.2.13 *Na ile sposobów można rodzielić trzy jednoosobowe zaproszenia na koncert między 12 osób?*

Zadanie 2.2.14 *Przed zajęciami spotkało się 11 studentów. Ile nastąpi powitań?*

Zadanie 2.2.15 *Ile różnych prostych można przeprowadzić przez osiem punktów, z których:*

1. *żadne trzy nie są współliniowe;*
2. *trzy z nich są współliniowe oraz pozostałe 5 tworzy jedną prostą?*

Zadanie 2.2.16 *Na ile sposobów możemy wręczyć karty brydżyście, tak aby otrzymał:*

1. *co najmniej jednego asa;*
2. *5 pików, 4 kiery i 4 kara;*
3. *10,9,8,7 (kolory tych kart mogą być dowolne)?*

Zadanie 2.2.17 *Ile jest różnych rozmieszczeń 5 serwetek w 5 szufladach komody, w których:*

1. *wszystkie szuflady są zajęte;*
2. *co najmniej jedna szuflada jest pusta;*
3. *dokładnie jedna szuflada jest pusta?*

Zadanie 2.2.18 *W pudełku znajduje się 15 kul białych i 5 czarnych. Losujemy bez zwracania 5 kul. Ile istnieje sposobów wylosowania:*

1. *samych kul białych;*
2. *co najmniej jednej kuli czarnej;*
3. *dokładnie 3 kul czarnych?*

Zadanie 2.2.19 *Ile różnych wyników uzyskamy przy rzucie nierozróżnialnymi kostkami do gry, gdy mamy:*

1. *4 kostki;*
2. *n kostek?*

Rozdział 3

Model probabilistyczny Kołmogorowa

3.1 Wprowadzenie teoretyczne i przykłady

Przez *model probabilistyczny Kołmogorowa*, zwany też *przestrzenią probabilistyczną*, będziemy rozumieli następującą trójkę: (Ω, Σ, P), gdzie Ω jest niepustym zbiorem nazywanym *przestrzenią zdarzeń elementarnych*, Σ jest *σ-ciałem zdarzeń*, $P : \Sigma \to R$ jest funkcją zwaną *funkcją prawdopodobieństwa* taką, że:

1. $P(A) \in [0, 1]$, dla każdego $A \in \Sigma$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. $P(A^C) = 1 - P(A)$, dla każdego $A \in \Sigma$;
4. $P(\bigcup_{n\in\mathbf{N}_o} A_n) = \sum_{n\in\mathbf{N}_o} P(A_n)$ dla dowolnych parami rozłącznych zdarzeń $A_n \in \Sigma$, $\mathbf{N}_o \subset \mathbf{N}$.

Fakt 3.1.1 *Dla każdej przestrzeni probabilistycznej* (Ω, Σ, P) *mamy:*

1. $P(\Omega) = 1$;
2. *jeśli* $A \subset B$, *to* $P(A) \leq P(B)$;
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, *dla dowolnych zdarzeń* A *i* B.

Przypomnimy najważniejsze przykłady przestrzeni probabilistycznych.

Przestrzeń probabilistyczna dyskretna

Przestrzeń probabilistyczną nazywamy *dyskretną*, jeśli

1. $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, gdzie $\mathbf{N}_0$ – zbiór skończony (co najmniej dwuelementowy), albo nieskończony podzbiór liczb naturalnych;
2. dany jest ciąg $p_n \in (0,1)$ taki, że $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}_0} p_n = 1$;
3. $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ – rodzina potęgowa;
4. funkcja prawdopodobieństwa jest zdefiniowana następująco:
   (a) $P(\{\omega_n\}) = p_n,\ n \in \mathbf{N}_0$;
   (b) $P(A) = \sum\limits_{\omega_n \in A} p_n \ \text{ dla } \ A \neq \emptyset$
   (c) $P(\emptyset) = 0$.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Model jednorodny

Jeśli przestrzeń Ω składa się z n zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = n$, oraz zdarzenia elementarne $\{\omega_i\}$ są jednakowo prawdopodobne, czyli

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = ... = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n},$$

to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A składającego się z k zdarzeń elementarnych ($|A| = k$) wyraża się równością

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n} = \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A}}{\text{liczba zdarzeń elementarnych przestrzeni } \Omega}$$

Powyższy wzór stanowił dawniej definicję prawdopodobieństwa zdarzenia, dlatego często nazywa się go „klasyczną definicją prawdopodobieństwa”.

Zadanie 3.1.1 *Spośród czterech kart różnego koloru losujemy jednocześnie dwie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie będą czarne lub obie czerwone?*

Rozwiązanie

$\Omega = \{\omega = \{x_1, x_2\} : x_i \in \{1,2,3,4\} \wedge i = 1,2\}$, gdzie $\{1,2,3,4\}$ jest zbiorem danych kart.