# Rozdział 3

# Model probabilistyczny Kołmogorowa

## 3.1 Wprowadzenie teoretyczne i przykłady

Przez *model probabilistyczny Kołmogorowa*, zwany też *przestrzenią probabilistyczną*, będziemy rozumieli następującą trójkę: $(\Omega, \Sigma, P)$, gdzie $\Omega$ jest niepustym zbiorem nazywanym *przestrzenią zdarzeń elementarnych*, $\Sigma$ jest $\sigma$*-ciałem zdarzeń*, $P : \Sigma \to R$ jest funkcją zwaną *funkcją prawdopodobieństwa* taką, że:

1. $P(A) \in [0, 1]$, dla każdego $A \in \Sigma$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. $P(A^C) = 1 - P(A)$, dla każdego $A \in \Sigma$;
4. $P(\bigcup_{n \in \mathbf{N}_o} A_n) = \sum_{n \in \mathbf{N}_o} P(A_n)$ dla dowolnych parami rozłącznych zdarzeń $A_n \in \Sigma$, $\mathbf{N}_o \subset \mathbf{N}$.

**Fakt 3.1.1** *Dla każdej przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \Sigma, P)$ *mamy:*

1. $P(\Omega) = 1$;
2. *jeśli* $A \subset B$, *to* $P(A) \leq P(B)$;
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, *dla dowolnych zdarzeń* $A$ *i* $B$.

Przypomnimy najważniejsze przykłady przestrzeni probabilistycznych.

### Przestrzeń probabilistyczna dyskretna

Przestrzeń probabilistyczną nazywamy *dyskretną*, jeśli

1. $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, gdzie $\mathbf{N}_0$ – zbiór skończony (co najmniej dwuelementowy), albo nieskończony podzbiór liczb naturalnych;
2. dany jest ciąg $p_n \in (0,1)$ taki, że $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}_0} p_n = 1$;
3. $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ – rodzina potęgowa;
4. funkcja prawdopodobieństwa jest zdefiniowana następująco:
   (a) $P(\{\omega_n\}) = p_n, \ n \in \mathbf{N}_0$;
   (b) $P(A) = \sum\limits_{\omega_n \in A} p_n \ \text{ dla } \ A \neq \emptyset$
   (c) $P(\emptyset) = 0$.

### Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Model jednorodny

Jeśli przestrzeń $\Omega$ składa się z $n$ zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = n$, oraz zdarzenia elementarne $\{\omega_i\}$ są jednakowo prawdopodobne, czyli

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = ... = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n},$$

to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A$ składającego się z $k$ zdarzeń elementarnych ($|A| = k$) wyraża się równością

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n} = \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A}}{\text{liczba zdarzeń elementarnych przestrzeni } \Omega}$$

Powyższy wzór stanowił dawniej definicję prawdopodobieństwa zdarzenia, dlatego często nazywa się go ,,klasyczną definicją prawdopodobieństwa".

**Zadanie 3.1.1** *Spośród czterech kart różnego koloru losujemy jednocześnie dwie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie będą czarne lub obie czerwone?*

### Rozwiązanie

$\Omega = \{\omega = \{x_1, x_2\} : x_i \in \{1,2,3,4\} \wedge i = 1,2\}$, gdzie $\{1,2,3,4\}$ jest zbiorem danych kart.

Wtedy
$$|\Omega| = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!} = 6.$$
Zdefiniujmy zdarzenie $A$, że obie karty będą czarne lub czerwone. Ponieważ $|A| = \binom{2}{2} + \binom{2}{2} = 1 + 1 = 2$ – gdyż albo wyciągniemy pika i trefla albo karo oraz kiera. Dlatego
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

**Zadanie 3.1.2** *Sześcian o krawędzi 6 dm pomalowano, a następnie rozcięto w ten sposób, że każdą krawędź podzielono na 6 kawałków o długości 1 dm. Otrzymane w ten sposób sześcianiki wrzucono do pojemnika i wymieszano. Oblicz prawdopodobieństwo, że przy losowaniu jednego sześcianika będzie miał on pomalowane:*

1. *3 ścianki;*
2. *co najmniej 2 ścianki;*
3. *nie będzie pomalowany?*

**Rozwiązanie**

Przecinając pomalowany sześcian na sześcianiki o krawędzi 1 dm, otrzymamy $6^3 = 216$ sześcianików, z których będziemy mieli 8 sześcianików z pomalowanymi 3 ścianami (te, które były w wierzchołkach dużego sześcianu).

Przy każdej krawędzi będziemy mieli 4 sześcianiki z pomalowanymi 2 ścianami. Sześcian ma 12 krawędzi, więc $12 \cdot 4 = 48$ – tyle sześcianików ma pomalowane dwie ściany. Na każdej ścianie dużego sześcianu mamy $4 \cdot 4 = 16$ sześcianików z jedną pomalowaną ścianą. Sześcian ma 6 ścian, więc w sumie mamy $16 \cdot 6 = 96$ sześcianików z jedną pomalowaną ścianą.

Niepomalowane sześciany to te, które leżą w całości we wnętrzu dużego sześcianu. Jest ich zatem $4^3 = 64$. Ponieważ $\Omega = \{x : x \in \{1, ..., 216\}\}$, $|\Omega| = 216$.

1. $A$ – zdarzenie polegające na tym, że sześcianik ma pomalowane 3 ściany
   $|A| = 8, \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$,
2. $B$ – zdarzenie polegające na tym, że sześcianik ma pomalowane co najmniej 2 ściany
   $|B| = 48 + 8 = 56, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{56}{216} = \frac{7}{27}$,

3. $C$ – zdarzenie polegające na tym, że sześcianik nie ma pomalowanej żadnej ścianki
$|C| = 64, \quad P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$.

### Przestrzeń dwupunktowa

Niech $\Omega = \{0, 1\}$ oraz $p$ będzie liczbą taką, że $p \in (0, 1)$. Określamy funkcję prawdopodobieństwa tak, że $P(\{1\}) = p$ oraz $P(\{0\}) = q$, gdzie $q = 1 - p$. Jest to tzw. *model standardowy dwupunktowy.*

### Przestrzeń Bernoulliego

Przestrzeń probabilistyczną nazywamy *przestrzenią Bernoulliego*, jeśli

$$\Omega = \{0, 1, 2, ..., n\}, \; n \in \mathbf{N}$$

oraz $p$ – parametr spełniający warunek $0 \leq p \leq 1$, z funkcją prawdopodobieństwa określoną ciągiem $p_k$:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, ..., n,$$

gdzie $q = 1 - p$.

**Zadanie 3.1.3** *Rzucamy symetryczną monetą. Ile rzutów należy wykonać, aby prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej 1 orła było większe niż* $0,99$*?*

### Rozwiązanie

Przy rzucie symetryczną monetą prawdopodobieństwo uzyskania orła w jednym rzucie wynosi $0,5$. Niech $A$ oznacza zdarzenie, że wykonaliśmy $n$ rzutów. Skorzystamy tu z własności prawdopodobieństwa, która mówi, że

$$P(A) = 1 - P(A^C).$$

Ponieważ

$$P(A^C) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

gdzie $n$ oznacza ilość rzutów, więc

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ale $P(A) > 0,99$, więc

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,01 \Leftrightarrow$$

$$2^n > 100 \Leftrightarrow n \geq 7.$$

**Przestrzeń Poissona**

Niech $\Omega = \mathbf{N} \cup \{0\}$ z funkcją prawdopodobieństwa określoną ciągiem

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda},\ n \geq 0.$$

Tak określona przestrzeń jest przestrzenią probabalistyczną dyskretną nieskończoną. Nazywamy ją *przestrzenią Poissona.*

**Zadanie 3.1.4** *Prawdopodobieństwo, że w pojedynczym rzucie kostką wypadnie 6 oczek wynosi* $\frac{1}{6}$. *Rzucamy kostką do gry tak długo, aż otrzymamy w rzucie 6 oczek. Niech k oznacza liczbę powtórzeń tego doświadczenia. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że*

1. *doświadczenie zakończymy w piątym rzucie;*
2. *liczba powtórzeń doświadczenia będzie nie mniejsza niż 3.*

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu zadania posłużymy się funkcją prawdopodobieństwa określoną następująco:

$$p_k = q^{k-1}p,$$

gdzie $k \in \mathbf{N}$ oraz $p + q = 1$.

1. $p = \frac{1}{6}$, zatem $q = 1 - p = \frac{5}{6}$ i dlatego

$$p_5 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} = \frac{625}{7776}.$$

2.

$$P(A_{k\geq 3}) = 1 - P(A_{k<3}) = 1 - p_1 - p_2 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{25}{36},$$

gdzie $A_{k\geq 3}$ oznacza zdarzenie, że liczba powtórzeń wynosi co najmniej 3.

### Stochastyczna niezależność zdarzeń

Mówimy, że zdarzenia $A$ i $B$ są *stochastycznie niezależne*, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

I ogólnie, zdarzenia $A_1, A_2, ..., A_n$ są stochastycznie niezależne, gdy prawdopodobieństwo łącznego zajścia dowolnych $m$ $(m \leq n)$ zdarzeń spośród nich jest równe iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń, czyli

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{im}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \cdot ... \cdot P(A_{im}).$$

**Zadanie 3.1.5** *Wykazać, że jeśli zdarzenia $A$ i $B$ są niezależne, to niezależne są również zdarzenia $A$ i $B^C$.*

### Rozwiązanie

Należy zauważyć, że skoro $A \cap B \subset A$, to $A \cap B^C = A - (A \cap B)$. Zatem

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B).$$

Z niezależności zdarzeń $A$ i $B$ mamy

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B^C) = P(A)(1 - P(B)) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B^C) = P(A) \cdot P(B^C),$$

co należało pokazać.

### Model warunkowy. Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $(\Omega, \Sigma, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $B$ zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$. Biorąc $(\Omega_B, \Sigma_B, P_B)$, gdzie

$$\Omega_B = B,\ \Sigma_B \text{ jest śladem } \Sigma \textit{ na } B$$

oraz

$$P_B(\tilde{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \ \tilde{A} = A \cap B \in \Sigma_B \text{ dla pewnego } A \in \Sigma,$$

dostaniemy nową przestrzeń probabilistyczną, nazywaną *przestrzenią warunkową.* Dalej będziemy pisali $P(A|B)$ zamiast $P_B(\tilde{A})$ i czytali *prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ pod warunkiem zajścia zdarzenia $B$.*

**Zadanie 3.1.6** *Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$. Udowodnić, że $P(A) + P(A^C \cap B) = P(B) + P(A \cap B^C)$.*

**Rozwiązanie**

Skorzystamy z pojęcia prawdopodobieństwa warunkowego. Dostaniemy kolejno

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

oraz

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Stąd $P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$.

Ponieważ

$$P(A|B) = 1 - P(A^C|B) \ i \ P(B|A) = 1 - P(B^C|A),$$

dostaniemy

$$(1 - P(A^C|B)) \cdot P(B) = (1 - P(B^C|A)) \cdot P(A) \Leftrightarrow$$

$$P(B) - P(A^C|B) \cdot P(B) = P(A) - P(B^C|A) \cdot P(A).$$

Wiemy, że $P(A^C|B) \cdot P(B) = P(A^C \cap B)$ oraz $P(B^C|A) \cdot P(A) = P(B^C \cap A)$, czyli $P(B) - P(A^C \cap B) = P(A) - P(B^C \cap A)$ i ostatecznie

$$P(B) + P(B^C \cap A) = P(A) + P(A^C \cap B).$$

**Twierdzenie 3.1.1** *(O prawdopodobieństwie zupełnym) Niech $A$ będzie dowolnym zdarzeniem, zaś $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ partycją losową. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ wyraża się równością*

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + ... + P(B_n) \cdot P(A|B_n),$$

*czyli*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i).$$

*Jest to tzw. wzór na prawdopodobieństwo zupełne.*

**Twierdzenie 3.1.2** *(Wzór Bayesa)*
*Niech $A$ będzie zdarzeniem takim, że $P(A) > 0$. Dla każdej partycji losowej $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ prawdopodobieństwa warunkowe $P(B_k|A)$ zdarzeń $B_k$ przy warunku $A$ $(k = 1, ..., n)$ wyrażają się wzorem*

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A)},$$

*gdzie* $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$.

**Zadanie 3.1.7** *Trzy fabryki produkujące pewne detale zaopatrują hurtownię. Z fabryki III pochodzi 35% detali, a z fabryki I cztery razy więcej niż z fabryki II. Wśród wyprodukowanych detali z I fabryki 40% jest pierwszego gatunku, z II fabryki–65%, a z III 70% detali. Z magazynu losowo wybieramy jeden detal. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że*

1. *jest on z I fabryki;*
2. *jest on pierwszego gatunku;*
3. *pochodzi z fabryki III, jeśli jest pierwszego gatunku.*

**Rozwiązanie**

Zdefiniujmy:
$A$ – zdarzenie polegające na tym, że detal jest pierwszego gatunku,
$B_1$ – zdarzenie polegające na tym, że detal pochodzi z fabryki I,
$B_2$ – zdarzenie polegające na tym, że detal pochodzi z fabryki II,
$B_3$ – zdarzenie polegające na tym, że detal pochodzi z fabryki III.
Z treści zadania wynika, że
$P(A|B_1) = 0,4, \;\; P(A|B_2) = 0,65, \;\; P(A|B_3) = 0,7.$

1. Ponieważ

   $$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega, \;\; B_1 \cap B_2 = \emptyset, \; B_2 \cap B_3 = \emptyset, \; B_1 \cap B_3 = \emptyset, \; P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = 1,$$

   więc dostaniemy kolejno:
   $P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 1,$
   $P(B_3) = 0,35,$
   $4 \cdot P(B_2) = P(B_1),$
   $4 \cdot P(B_2) + P(B_2) + 0,35 = 1,$
   $5 \cdot P(B_2) = 0,65 \Rightarrow P(B_2) = 0,13,$
   $P(B_1) = 4 \cdot 0,13 = 0,52.$

2. $P(A) = \sum_{n=1}^{3} P(A|B_n) \cdot P(B_n) = 0,4 \cdot 0,52 + 0,65 \cdot 0,13 + 0,7 \cdot 0,35 = 0,5375.$

3. $P(B_3|A) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(A)} = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)} = \frac{0,7 \cdot 0,35}{0,5375} = \frac{0,245}{0,5375} \approx 0,456.$

### Przestrzeń produktowa

Załóżmy, że dane są dwie przestrzenie probabilistyczne $(\Omega_1, \Sigma_1, P_1)$ i $(\Omega_2, \Sigma_2, P_2)$. Przez *przestrzeń produktową* rozumiemy taką przestrzeń $(\Omega, \Sigma, P)$, dla której $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, z $\sigma$-ciałem produktowym powstałym z $\Sigma_1$ i $\Sigma_2$. Funkcja prawdopodobieństwa $P$ określona jest wtedy następująco:

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2).$$

I ogólnie, niech

$$(\Omega_j, \Sigma_j, P_j),\ j = 1, ..., n$$

będzie ciągiem przestrzeni probabilistycznych. Wtedy $(\Omega, \Sigma, P)$, gdzie

1. $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \otimes ... \otimes \Sigma_n$
3. $P(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) \cdot ... \cdot P_n(A_n)$

dla $A_j \in \Sigma_j$, jest uogólnioną przestrzenią produktową dowolnej skończonej ilości przestrzeni probabilistycznych.

**Zadanie 3.1.8** *Pokazać, że zdarzenia $A = A_1 \times \Omega_2$ i $B = \Omega_1 \times B_1$ są stochastycznie niezależne w przestrzeni produktowej.*

### Rozwiązanie

Weźmy prawdopodobieństwo produktowe $P$. Należy pokazać, że $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Ponieważ

$$A \cap B = (A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B_1) = A_1 \times B_1,$$

więc z definicji prawdopodobieństwa produktowego dostaniemy

$$P(A \cap B) = P_1(A_1)P_2(B_1).$$

Ale

$$P_1(A_1) = P(A) \text{ oraz } P_2(B_1) = P(B),$$

co kończy dowód.

**Zadanie 3.1.9** *Weźmy $n$ kopii standardowej przestrzeni dwupunktowej oraz utwórzmy z tych kopii ich produkt. Opisać zdarzenia elementarne w tej przestrzeni. Dla $k \in \{0, \ldots, n\}$ niech $S_k$ oznacza zdarzenie w $\sigma$-ciele produktowym złożone z tych zdarzeń elementarnych, że liczba 1 pojawia się dokładnie $k$ razy. Przyjmując, że prawdopodobieństwo pojedynczego pojawienia się liczby 1 wynosi $p \in (0, 1)$, obliczyć $P(S_k)$.*

**Rozwiązanie**

Niech $(\Omega_o, \Sigma_o, P_o)$ oznacza przestrzeń standardową dwupunktową. Wtedy $\Omega = \Omega_o^n$ z $\sigma$-ciałem produktowym $\Sigma$ i prawdopodobieństwem produktowym $P$. Dlatego każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ jest ciągiem o wyrazach $0,\ 1$ długości $n$. Jeśli w takim ciągu cyfra 1 pojawia się $k$ razy, to z definicji prawdopodobieństwa produktowego dostaniemy

$$P(\{\omega\}) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ponieważ $\omega \in S_k \Leftrightarrow$ cyfra 1 pojawia się $k$ razy i takich zdarzeń elementarnych w zdarzeniu $S_k$ jest $\binom{n}{k}$, więc $P(S_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Wynik taki już widzieliśmy, omawiając model Bernoulliego.

**Zadanie 3.1.10** *Z talii 24 kart (od 9 do asa) losujemy jedną kartę. Niech $A_1$– zdarzenie polegające na tym, że wylosowaną kartą jest as, $A_2$ – zdarzenie polegające na tym, że wylosowaną kartą jest pik. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaną kartą jest:*

1. *as pik;*
2. *pik, ale nie as.*

**Rozwiązanie**

Mamy tu do czynienia z przestrzenią dwuwymiarową określoną następująco:

$$\Omega = \{(x, y) : x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\},$$

gdzie:
$\Omega_1$ – zbiór figur w kartach, $|\Omega_1| = 6$, $\Omega_2$ – zbiór kolorów w kartach, $|\Omega_2| = 4$.
Dostaniemy odpowiednio

1. $P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$,
   $|A_1| = 1$, $P_1(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{1}{6}$.
   $|A_2| = 1$, $P_2(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{1}{4}$,
   $P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) = \frac{1}{24}$.

2. $P(A_1^C \times A_2) = P_1(A_1^C) \cdot P_2(A_2)$,
   $P(A_1^C \times A_2) = (1 - P_1(A_1)) \cdot P_2(A_2) = \frac{5}{24}$.

### Prawdopodobieństwo geometryczne

Jeśli $\Omega = [a_1, a_2] \times [a_2, b_2]$, to typowe zdarzenie $A$ w *dwuwymiarowej przestrzeni geometrycznej* ma postać:

$$A = \{(x, y) \in \Omega : x \in [a_1, b_1],\ d(x) \leq y \leq g(x)\},$$

gdzie $d$ i $g$ – funkcje ciągłe określone na odcinku $[a_1, b_1]$.
Prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi wtedy

$$P(A) = \frac{\int\limits_{a_1}^{b_1} (g(x) - d(x))dx}{(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)}.$$

**Zadanie 3.1.11** *Z kwadratu $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ wybieramy punkt, którego współrzędne wynoszą $(p, q)$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że równanie*

$$x^2 + px + q = 0$$

*nie będzie miało pierwiastków rzeczywistych?*

### Rozwiązanie

Równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych, gdy

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow p^2 - 4 \cdot q < 0 \Leftrightarrow q > \frac{p^2}{4}$$

Weźmy $\Omega = \{(p, q) : 0 \leq p \leq 1 \wedge 0 \leq q \leq 1\}$. Ponieważ pole $|\Omega| = 1$, więc

$$P(A) = \int\limits_0^1 \frac{p^2}{4} dp = \frac{1}{12}.$$

## 3.2 Zadania

**Zadanie 3.2.1** *W szafce mamy 10 par butów. Wyciągamy losowo 6 butów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród nich nie będzie żadnej pary?*

**Zadanie 3.2.2** *Rzucamy dwa razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w sumie otrzymamy*

1. *8 oczek;*
2. *co najmniej 3 oczka?*

**Zadanie 3.2.3** *Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że 7 losowo wybranych osób urodziło się w różnych dniach tygodnia.*

**Zadanie 3.2.4** *Przed kolokwium z matematyki w grupie liczącej 24 studentów prowadzący zaproponował studentom, aby wpisali na kartkach po jednej liczbie naturalnej od 1 do 40. W przypadku gdy wszystkie wpisane liczby będą różne, odwołuje kolokwium i wszyscy otrzymują ocenę bardzo dobrą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kolokwium zostanie odwołane?*

**Zadanie 3.2.5** *Uzasadnić, że prawdopodobieństwo warunkowe jest prawdopodobieństwem.*

**Zadanie 3.2.6** *Wiemy, że* $P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A^C) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$.
*Obliczyć* $P(A \cup B)$ *oraz* $P(A^C \cap B^C)$.

**Zadanie 3.2.7** *Przy danych* $P(A|B) = P(B|A), P(A \cup B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ *obliczyć* $P(B)$ *oraz* $P(A^C \cap B^C)$.

**Zadanie 3.2.8** *Na egzaminie student otrzymuje jedną z ocen: bardzo dobry, dobry, dostateczny, niedostateczny. W przypadku otrzymania oceny bardzo dobrej, dobrej, dostatecznej egzamin jest zdany. Prawdopodobieństwo tego, że student uzyska ocenę bardzo dobrą lub dobrą jest równe 0,6. Prawdopodobieństwo zdania egzaminu wynosi 0,9. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania oceny dostatecznej na egzaminie.*

**Zadanie 3.2.9** *Liczby* $\{1,2,...,9\}$ *są ustawione w sposób losowy. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że*

1. *liczby 1 i 2 będą stały obok siebie;*
2. *liczba 1 będzie w tym ciągu przed liczbą 5.*

**Zadanie 3.2.10** *Do windy, która zatrzymuje się na 10 piętrach, wsiada 8 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo, że*

1. *każdy z pasażerów wysiądzie na innym piętrze;*

2. *wszyscy wysiądą na trzech ostatnich piętrach.*

**Zadanie 3.2.11** *Z talii ośmiu kart, w której mamy 4 asy i 4 króle, wybieramy losowo 2 karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że*

1. *wybrano dwa asy, jeśli wybrano co najmniej jednego asa;*

2. *wybrano dwa asy, jeśli wiadomo, że wśród kart jest as pik.*

**Zadanie 3.2.12** *Wykazać, że dla* $A, B, C \in \Omega$ *takich, że* $P(A \cap B) > 0$*, zachodzi równość* $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|(A \cap B))$.

**Zadanie 3.2.13** *Niech* $\Omega = \{(x, y) : x \in R \wedge y \in R\}$*. Zdarzenia* $A$ *i* $B$ *są określone następująco:*
$A = \{(x, y) : |x - 1| < 1 \wedge |y - 1| < 1\}$
$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$.
*Wyznaczyć* $P(A|B)$ *i* $P(B|A)$.

**Zadanie 3.2.14** *Wykazać, że jeśli* $A, B \subset \Omega$ *są zdarzeniami niezależnymi, to niezależne są też zdarzenia* $A^C$ *i* $B^C$.

**Zadanie 3.2.15** *Wiadomo, że średnio 4 mężczyzn na 100 i 4 kobiety na 1000 są daltonistami. Z grupy, w której liczba kobiet jest dwa razy większa od liczby mężczyzn, wybrano osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest daltonistą? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybranym daltonistą jest mężczyzna?*

**Zadanie 3.2.16** *Ze zbioru* $\{1,2,...,n\}$*, gdzie* $n > 3$*, losujemy dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jedna z nich będzie mniejsza, a druga większa od k, gdzie* $1<k<n$ *i* $k \in N$.

**Zadanie 3.2.17** *W pewnym mieście mieszka 10 000 osób. Prawdopodobieństwo, że wybrana osoba będzie potrzebowała natychmiastowej pomocy lekarskiej wynosi 0,002. Obliczyć prawdopodobieństwo wezwania pogotowia przez:*

1. *któregokolwiek mieszkańca tego miasta;*

2. *więcej niż 2, ale nie więcej niż 5 mieszkańców tego miasta;*

3. *co najmniej 3 mieszkańców tego miasta.*

**Zadanie 3.2.18** *Trzech dostawców dostarcza do hurtowni cytrusy. Dostawy tych dostawców mają się jak 3:5:4. I dostawca dotarcza około 1% skrzynek zepsutych owoców, II – 4%, a III – 3%. Wybraliśmy skrzynkę z dobrymi owocami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dostarczył ją dostawca I?*

**Zadanie 3.2.19** *W dwóch jednakowo wyglądających kopertach znajdują się talie kart, przy czym w pierwszej jest to talia 52 kart, a w drugiej 24 kart (od 9 do asa). Z losowo wybranej kopert wyciągamy kartę i wkładamy do drugiej. Następnie wybieramy jedną kartę z drugiej koperty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniętą kartą będzie as?*

**Zadanie 3.2.20** *Zbiór $\{1,2,\ldots,4n\}$ podzielono na dwie równoliczne części. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w każdej z nich jest taka sama ilość liczb podzielnych przez $n$.*

**Zadanie 3.2.21** *W dwóch jednakowych koszykach jest po 10 białych piłek tenisowych. Wkładamy do tych koszyków 20 czerwonych piłek. Jak rozmieścić te piłki w koszach, aby prawdopodobieństwo wybrania piłki czerwonej z losowo wybranego koszyka było równe $\frac{7}{15}$?*

**Zadanie 3.2.22** *Z odcinka $[0,2]$ wybieramy losowo i niezależnie dwa punkty. Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że odległość między nimi jest mniejsza od 1. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $A$.*

**Zadanie 3.2.23** *Z odcinka $[0,k]$ wybieramy losowo i niezależnie punkty $x$ i $y$. Niech $A$ – zdarzenie polegające na tym, że $x^2+y^2>\frac{k^2}{4}$, $B$ – zdarzenie, że funkcja $ln(x^2+y^2-k)$ jest dobrze określona.*

1. *Czy zdarzenia $A$ i $B$ są niezależne?*
2. *Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $B$ pod warunkiem, że zajdzie zdarzenie $A$.*