Finanse i Rachunkowość
studia stacjonarne

Wprowadzenie do Matematyki Finansowej[1]

(treść wykładów z 14 i 21 stycznia 2015)

1 Sformułowanie głównego problemu

Istotą jakiejkolwiek działalności gospodarczej jest fakt, że przedsiębiorca dysponuje *aktywem*, a więc takim rodzajem zasobu majątkowego, który teraz lub w przyszłości, w wyniku jego użycia przyniesie korzyści w postaci *przychodu*, a w efekcie końcowym być może w postaci *zysku*. Dalej, dla uproszczenia założymy, że tym aktywem jest *zasób pieniężny*[2], który dalej będziemy nazywali *kapitałem*. Interesowała nas będzie zmiana wartości zainwestowanego w przedsięwzięcie gospodarcze kapitału w funkcji czasu. Prześledzimy to zjawisko na przykładzie modelowej transakcji bilateralnej polegającej na *lokowaniu kapitału*, przyjmując, że stronami tej transakcji będą **bank** i jego **klient**.

Zaczniemy od sformułowania niezbędnych warunków jakie muszą być spełnione z punktu widzenia *zasad matematyki finansowej*.

(a) Dla każdej takiej transakcji wyróżnimy dwie ważne chwile:

$$\mathbf{P}\ -\ \textit{teraźniejszość (present) oraz}\ \mathbf{F}\ -\ \textit{przyszłość (future)},$$

co graficznie będziemy przedstawiali jak na rysunku 1, gdzie przez $\mathbf{T}$

Rysunek 1: postać okresu bazowego długości $\mathbf{T}$

oznaczyliśmy długość okresu bazowego mierzonego w ilościach dni.

(b) Niech $\mathbf{K}$ oznacza kapitał określony jak wyżej. Jeżeli pojawi się on w chwili $t \in [0, T]$, to oznaczymy go przez $\mathbf{K}(t)$. Wtedy $\mathbf{K}(t)$ ma znaczenie podwójne: oznacza wartość (w zł) tego kapitału oraz informuje

[1] Wykład powstał na podstawie książki autora „Wprowadzenie do arytmetyki finansowej" dostępnej w księgarnii Uczelni. W książce można znaleźć wiele przykładów ilustrujących jego treść i zadań do samodzielnego rozwiązania.

[2] Obrót takim zasobem jest najbardziej płynny.

o chwili pojawienia się tej wartości. Będziemy wtedy mówili, że *kapitał jest datowany*, a powyższą procedurę nazwiemy *zasadą datowania kapitału* (ZDK).

(c) W szczególności przyjmiemy, że

$$\mathbf{K}(0) = \mathbf{PV},\ \mathbf{K}(T) = \mathbf{FV}.$$

(d) Jeśli dla chwil $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ dane będą wartości datowane kapitału $\mathbf{K}(t_1)$, $\mathbf{K}(t_2)$, to zgodnie z (ZDK) wartości tych nie wolno porównywać ze sobą. Aby stały się one porównywalne należy je *przedatować* na tę samą chwilę $t_o \in [0, T]$[3]. Procedura *przedatowania* nazywana będzie dalej *zasadą porównywania kapitału* (ZPK).

(e) Okres bazowy jest tak zdefiniowany, że spełnione jest następujące założenie: w chwili T dochodzi do zjawiska *zwrotu* (przez bank) zainwestowanego kapitału (klientowi). Oznacza to, że kapitał $\mathbf{PV}$ zostaje przedatowany na chwilę T i dlatego wartości $\mathbf{PV}$ oraz $\mathbf{FV}$ mogą być porównywane, zgodnie z (ZPK). W szczególności można je od siebie odejmować

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{FV} - \mathbf{PV},$$

co prowadzi do pojęcia $\mathbf{I}_T$*–odsetek za okres* T. Dalej będziemy zakładali, że $\mathbf{FV} > \mathbf{PV}$, co oznacza, że transakcja będzie generowała *przychód*.

(f) Będziemy zakładali, że z teoretycznego punktu widzenia[4] w każdej chwili $t \in (0, T)$ może nastąpić zjawisko zwrotu zainwestowanego kapitału. Wtedy funkcja

$$[0, T] \ni t \to \mathbf{I}(t) = \mathbf{K}(t) - \mathbf{PV}$$

określa przychód z transakcji za okres t dni okresu bazowego.

Zauważmy, że wtedy, zgodnie ze wcześniejszymi ustaleniami mamy

$$\mathbf{I}(0) = 0,\ \mathbf{I}(T) = \mathbf{I}_T.$$

(g) Wreszcie będziemy zakładali, że dla danej transakcji wielkość odsetek zależy tylko od czasu trwania transakcji oraz zależność ta jest *proporcjonalna*, czyli $\mathbf{I}(t) \sim t$.[5] Oznacza to, że dla pewnych stałych rzeczywistych k, b,

$$\mathbf{I}(t) = kt + b.$$

[3]Zsada ta podana zostanie dalej.

[4]Z praktycznego punktu widzenia tak może zdarzyć się w wyniku jednostronnego zerwania umowy.

[5]Jest to realizacji zasady *time is money*.

Z warunku $\mathbf{I}(0) = 0$ wynika, że $b = 0$. Dlatego

$$\mathbf{I}(t) = kt, \text{ gdzie } k > 0.$$

Dalej ostanią zależność będziemy nazywali *zasadą jednorodności czasu* (ZJC).

2 Model odsetek prostych

Zakładamy, że mamy transakcję, która przebiega według zasad (a)–(g). Z definicji funkcji $t \to \mathbf{I}(t)$ wynika, że

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{PV} + \mathbf{I}(t), \ t \in [0, T] \tag{1}$$
$$\mathbf{I}(t) = kt. \tag{2}$$

Stąd $\mathbf{K}(t) = \mathbf{PV} + kt$. Podstawiając w ostatniej równości $t = T$, z faktu, że $\mathbf{K}(T) = \mathbf{FV}$, po prostym przekształceniu otrzymamy wzór na współczynnik k

$$k = \frac{\mathbf{FV} - \mathbf{PV}}{T}.$$

Dlatego

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{PV} + \frac{\mathbf{FV} - \mathbf{PV}}{T}t, \quad t \in [0, T]. \tag{3}$$

Ale

$$\frac{\mathbf{FV} - \mathbf{PV}}{T} = \frac{\mathbf{FV} - \mathbf{PV}}{\mathbf{PV}}\frac{\mathbf{PV}}{T}, \tag{4}$$

więcej oznaczając przez

$$\mathbf{i}_T = \frac{\mathbf{FV} - \mathbf{PV}}{\mathbf{PV}}, \tag{5}$$

gdzie dalej $\mathbf{i}_T$ będziemy nazywali *bazową stopą zwrotu*, z (3) i (5) otrzymamy równanie

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{PV} + \mathbf{PV} \cdot \mathbf{i}_T \frac{t}{T}, \quad t \in [0, T], \tag{6}$$

opisujące *model odsetek prostych* (MOP)[6].

W zastosowaniach MOP funkcjonuje w sytuacji kiedy w (6) $t = T$, co prowadzi do równań

$$\mathbf{FV} = \mathbf{PV}(1 + \mathbf{i}_T) \tag{7}$$
$$\mathbf{I}_T = \mathbf{FV} - \mathbf{PV} = \mathbf{PV} \cdot \mathbf{i}_T. \tag{8}$$

[6]Należy pamiętać, że w równaniu tym, dla danej transakcji, stopa zwrotu $\mathbf{i}_T$ nie zależy od wielkości zainwestowanego kapitału, zależy natomiast tylko od długości okresu bazowego T. W tym sensie stopa zwrotu opisuje dynamikę opisywanej transakcji.

Uwaga 1

1. W równaniu (7) MOP pojawiają się trzy wielkości: $\mathbf{PV}$, $\mathbf{FV}$, $\mathbf{i}_T$. Znajomość każdych dwóch pozwala wyliczyć trzecią.

2. Stopa zwrotu $\mathbf{i}_T$ zależy tylko od długości okresu bazowego, czyli od T. Oznacza to, że jeśli mamy dwa różne okresy bazowe, dla których $T_1 < T_2$, to odpowiadające im stopy bazowe $\mathbf{i}_{T_1}$, $\mathbf{i}_{T_2}$ nie można ze sobą porównywać. Aby to można było zrobić, potrzebna jest (jak w przypadku ZPK) zasada ich *konwersji* do okresu bazowego o jednakowej długości T_o. W rozliczeniach finansowych przyjmuje się, że $T_o = ldr$[7].

   Aby wyjaśnić bliżej to zjawisko, dla uproszczenia założymy, że dla danego okresu bazowego, $T < ldr$. Następnie stosując równanie (6) przedłużymy je z okresu $[0, T]$ do okresu $[0, ldr]$, czyli

   $$\mathbf{K}(t) = \mathbf{PV} + \mathbf{PV} \cdot \mathbf{i}_{ldr} \frac{t}{ldr}, \quad t \in [0, T]. \tag{9}$$

   Dalej przyjmiemy oznaczenie $\mathbf{i}_{ldr} = \mathbf{R}$, i taką stopę zwrotu nazwiemy stopą *per annum*[8]. Wtedy równanie (9), po podstawieniu $t = T$ przyjmie postać

   $$\mathbf{FV} = \mathbf{PV} + \mathbf{PV} \cdot \mathbf{R} \frac{T}{ldr}. \tag{10}$$

   Z drugiej strony zawsze mamy równanie (7), skąd wynika, że

   $$\mathbf{R} \frac{T}{ldr} = \mathbf{i}_T. \tag{11}$$

   Równanie (11) będziemy nazywali *zasadą dostosowania stopy bazowej* (ZDS). Dla przykładu, jeśli dla dwóch stóp bazowych: $\mathbf{i}_{T_1} = 0,12$ dla $T_1 = 75$ dni oraz $\mathbf{i}_{T_2} = 0,13$ dla $T_1 = 85$ dni mielibyśmy wybrać korzystniejszą, czyli większą, to zgodnie z ZDS należy, korzystając ze wzoru (11), wyliczyć odpowiadaję im stopy $p.a$, a następnie wybrać tę większą, co pozostawiamy Czytelnikowi.

3. Ostatnia uwaga formułuje tzw. *zasadę prolongaty MOP* (ZP). Niech teraz T_o oznacza długość podstawowego okresu bazowego transakcji. Transakcję będziemy sukcesywnie przedłużali z okresu na kolejny okres, według następujących zasad:

   (a) na koniec każdego podokresu ma miejsce zwrot zainwestowanego kapitału $\mathbf{PV}$,

[7] Skrót ten oznacza *liczbę dni w roku kalendarzowym.*

[8] Z j. łacińskiego oznacza *za rok.*

(b) za kolejne podokresy naliczane odsetki należne są na koniec całego cyklu złożonego z n–podokresów, czyli po upływie $T = nT_o$ dni,

(c) w każdym z n podokresów obowiązuje stała stopa bazowa $\mathbf{i}_{T_o}$.

Dlatego po upływie podokresu pierwszego, na mocy MOP, $\mathbf{I}_{T_o} = \mathbf{PVi}_{T_o}$. Podobnie, po upływie drugiego podokresu $\mathbf{I}_{2T_o} = \mathbf{PVi}_{T_o}$ itd., skąd

$$\mathbf{FV} = \mathbf{PV} + n\mathbf{PVi}_{\mathbf{T_o}} = \mathbf{PV}(1 + n\mathbf{i}_{T_o}).$$

Jeśli teraz na tak zdefiniowaną transakcję spojrzymy z perspektywy całego okresu $T = nT_o$, stopę zwrotu dla tej transakcji oznaczymy przez $\mathbf{i}_T$, to z MOP wynika, że

$$\mathbf{FV} = \mathbf{PV}(1 + \mathbf{i}_T).$$

Z porównania ostanich dwóch wzorów wynika, że wtedy[9]

$$\mathbf{i}_T = n\mathbf{i}_{T_o}.\ \text{gdzie}\ T = nT_o. \tag{12}$$

3 Model odsetek złożonych – efekt kapitalizacji

Model odsetek złożonych (MOZ) uzyskamy w wyniku prolongaty (MOP) określonego na zasadach sformułowanych w pkt. (a)–(g) rozdziału 1 przy następujących założeniach:

1. okres bazowy długości T składa się z n podokresów bazowych, każdy długości T_o, czyli $T = nT_o$,

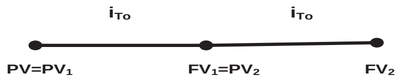
2. na koniec każdego podokresu bazowego, a więc na początku kolejnego, dochodzi do zwrotu zainwestowanego kapitału powiększonego o należne za miniony podokres odsetki[10],

3. w każdym z podokresów obowiązuje jednakowa bazowa stopa zwrotu $\mathbf{i}_{T_o}$,

4. wartości kapitału na początku kolejnego podokresu oznaczymy odpowiednio przez $\mathbf{PV}_1, \dots \mathbf{PV}_n$,

5. wartości kapitału na końcu kolejnego podokresu oznaczymy odpowiednio przez $\mathbf{FV}_1, \dots \mathbf{FV}_n$,

6. wartość początkowa kapitału wynosi $\mathbf{PV} = \mathbf{PV}_1$, końcowa $\mathbf{FV} = \mathbf{FV}_n$.



Rysunek 2: zjawisko kapitalizacji

Prześledźmy ewolucję zmiany w czasie wartości zainwestowanej $\mathbf{PV}$ w transakcji spełniającej warunki (1)–(6). Na koniec drugiego okresu sytuacja wygląda jak na rysunku 2.

Zgodnie z MOP, na koniec pierwszego podokresu będziemy mieli

$$\mathbf{FV}_1 = \mathbf{PV}_1(1+\mathbf{i}_{T_o}) = \mathbf{PV}(1+\mathbf{i}_{T_o}) \tag{13}$$
$$\mathbf{PV}_2 = \mathbf{FV}_1. \tag{14}$$

Podobnie, na koniec drugiego podokresu z powyższego otrzymamy

$$\mathbf{FV}_2 = \mathbf{PV}_2(1+\mathbf{i}_{T_o}) = \mathbf{FV}_1(1+\mathbf{i}_{T_o}) = \mathbf{PV}(1+\mathbf{i}_{T_o})^2. \tag{15}$$

Stąd, za cały okres $[0, 2T_o]$, dla stopy zwrotu $\mathbf{i}_{2T_o}$ dostaniemy

$$\mathbf{FV}_2 = \mathbf{PV}(1+\mathbf{i}_{2T_o}), \text{ skąd} \tag{16}$$
$$\mathbf{i}_{2T_o} = (1+\mathbf{i}_{T_o})^2 - 1, \tag{17}$$
$$\mathbf{I}_{2T_o} = \mathbf{FV}_2 - \mathbf{PV} = \mathbf{PV}\cdot\mathbf{i}_{2T_o}. \tag{18}$$

I ogólnie, dla n podokresów równania (16)–(18) będą miały postać

$$\mathbf{FV}_n = \mathbf{PV}(1+\mathbf{i}_{nT_o}), \text{ skąd} \tag{19}$$
$$\mathbf{i}_{nT_o} = (1+\mathbf{i}_{T_o})^n - 1, \tag{20}$$
$$\mathbf{I}_{nT_o} = \mathbf{FV} - \mathbf{PV} = \mathbf{PV}\cdot\mathbf{i}_{nT_o}. \tag{21}$$

Powyższe równania opisują *model odsetek złożonych* (MOZ), gdzie okres bazowy składa się z n podokresów, czyli $T = nT_o$ i w każdym obowiązuje jednakowa bazowa stopa zwrotu. Zjawisko zachodzące na końcu każdego podokresu

[9] W sytuacji kiedy w kolejnych podokresach obowiązują różne stopy bazowe $\mathbf{i}_k$, $k = 1, 2, \ldots n$ (np. z powodu różnych długości tych podokresów), to wtedy odpowiednikiem (12) jest równość $\mathbf{i}_T = \mathbf{i}_1 = \ldots + \mathbf{i}_n$.

[10] Zjawisko powiększania kapitału o naliczone za miniony podokres odsetki nazywamy *kapitalizacją odsetek.*

polegające na włączaniu naliczonych odsetek za poprzedni okres do kapitału początkowego kolejnego okresu nazywamy *kapitalizacją odsetek*. Stopę zwrotu daną wzorem (20) nazywamy wtedy *efektywną stopą zwrotu dla n–krotnej kapitalizacji* i oznaczamy ją przez $\mathbf{i}_{ef_n}$.

Wniosek 1 *Przypuśćmy, że mamy transakcję złożoną z* n *podokresów, z jednakową bazową stopą zwrotu* $\mathbf{i}_{T_o}$, *opisaną MOZ oraz MOP w wersji prolongowanej. Wtedy MOZ jest efektywniejszy, czyli*

$$\mathbf{i}_{ef_n} = (1 + \mathbf{i}_{T_o})^n - 1 > n\mathbf{i}_{T_o}, \text{ o ile } n \geqslant 2.$$

Wniosek 2 *Niech dany będzie MOZ na warunkach jak wyżej. Oznaczmy przez* $\mathbf{I}_j$ *odsetki naliczone za okres poprzedni* $j-1$. *Jak wiemy, odsetki te z jednej strony stają się częścią kapitału, od którego liczone są odsetki* $\mathbf{I}_{j+1}$, *z drugiej strony są one należne dopiero na koniec okresu trwania transakcji, a więc na chwilę* $T = nT_o$. *Zgodnie z ZDK możemy je wtedy dodać do siebie i otrzymamy*

$$\mathbf{I}_{sk} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}_j.$$

Dalej otrzymaną wartość będziemy oznaczali przez $\mathbf{I}_{sk}$ *i nazywali odsetkami skumulowanymi. Z MOZ (20) wiemy, że należne odsetki z tej transakcji za okres* T *wynoszą* $\mathbf{I}_T = \mathbf{PV} \cdot \mathbf{i}_{ef_n}$. *Okazuje się, że zawsze zachodzi równość*

$$\mathbf{I}_{sk} = \mathbf{PV} \cdot \mathbf{i}_{ef_n},$$

o uzasadnienie czego prosimy Czytelnika.

Uwaga 2 *Wybór korzystniejszej transakcji typu MOZ odbywa się na podstawie oceny jej stopy efektywnej. Ponieważ stopy efektywne mogą odnosić się do okresów złożonych z różnej ilości dni, zgodnie z ZPK każdą z nich należy przekonwertować do jednakowo długiego okresu. W rachunkowości tym okresem jest rok mierzony wielkością ldr. Wtedy stopa efektywna* $\mathbf{i}_{ef_n}$ *dopasowana do ldr wygląda następująco*

$$\mathbf{i}_o = (1 + \mathbf{i}_{T_o})^{n_o} - 1, \text{ gdzie } n_o T_o = ldr. \tag{22}$$

Ponieważ $\mathbf{i}_{T_o} = \mathbf{R}\frac{T_o}{ldr}$, *to* $\mathbf{i}_{T_o} = \frac{\mathbf{R}}{n_o}$, *skąd z (22) dostaniemy*

$$\mathbf{i}_o = \left(1 + \frac{\mathbf{R}}{n_o}\right)^{n_o} - 1. \tag{23}$$

Stopę $\mathbf{i}_o$ *nazywamy nominalną efektywną stopą zwrotu.*

Przypuśćmy, że stoimy przed wyborem korzystniejszej dla nas transakcji spośród dwóch proponowanych:

- *A:* $\mathbf{R}_A = 8\%$, *z kapitalizacją miesięczną,*
- *B:* $\mathbf{R}_B = 14\%$, *z kapitalizacją kwartalną.*

Aby obie propozycje można było ze sobą porównać i wybrać tę korzystniejszą należy każdą ze stóp efektywnych sprowadzić do stopy nominalnej. Zgodnie z (23) otrzymamy

$$\mathbf{i}_{o_A} = \left(1 + \frac{\mathbf{R}_A}{12}\right)^{12} - 1, \quad \mathbf{i}_{o_B} = \left(1 + \frac{\mathbf{R}_B}{4}\right)^{4} - 1.$$

Czytelnikowi zostawiamy przeprowadzenie niezbędnych obliczeń.

4 Dyskonto proste i złożone – wstęp do CF

W obu modelach, MOP i MOZ, z praktycznego punktu widzenia pytaliśmy się o zysk z transakcji, wiedząc, że dysponujemy na początku określonym kapitałem. Jak wiemy, wyliczenie tego zysku związane było ze znajomością pewnej stopy zwrotu. Tak rozumianą stopę zwrotu nazywamy też *stopą kapitalizacji*[11].

Zmienimy teraz rozumiane wyżej warunki początkowe transakcji. Przypuśćmy, że dla okresu bazowego jak na rys. 1, w chwili T oczekujemy z transakcji przychodu w wysokości $\mathbf{FV}$. Pytamy się, ile musimy zainwestować w chwili 0, aby cel mógłby być zrealizowany. Zachodzą co najmniej trzy sytuacje:

1. jesteśmy w posiadaniu środków własnych aby zainwestować w tę transakcję,
2. w ogóle ich nie mamy, albo dysponujemy tylko ich częścią. Wobec tego aby zainwestować będziemy zmuszeni je pozyskać,
3. nie mamy tych środków i nie stać nas na aktualnych warunkach na ich pozyskanie.

W wymienionych wyżej przypadkach udział w transakcji inwestor będzie musiał okupić kosztem, którego źródłem będzie:

1. rezygnacja z alternatywnej inwestycji, na ogół bezpieczniejszej aniżeli ta, o której mówimy, ale mniej dochodowej[12],
2. koszt związany z obsługą kredytu, który będzie zasilał kapitał inwestycyjny,
3. utrata przyszłych zamierzonych przychodów z powodu nie zainwestowania w transakcję.

Jeśli weźmiemy pod uwagę tylko pierwsze dwa scenariusze, to pojawi się jeszcze jedno źródło kosztu (wspomnieliśmy o nim pośrednio w sytuacji pierwszej), będzie nim *ryzyko* związane z niepewnością powodzenia transakcji, a więc osiągnięcia zamierzonego celu. Wymierna postć tych trzech zjawisk składa się co najmniej na wartość liczbową stopy bazowej $\mathbf{i}_T$, która powinna spełniać równanie (7), czyli

$$\mathbf{X}(1 + \mathbf{i}_T) = \mathbf{FV},$$

gdzie symbolem $\mathbf{X}$ oznaczyliśmy nieznaną wartość kapitału inwestycyjnego.

Rozwiązując powyższe równanie otrzymamy odpowiedź na postawione na wstępie pytanie, na ile właściwie skalkulowaliśmy koszt pozyskania na ten cel wyliczonych środków, bowiem wtedy

$$\mathbf{PV} = \mathbf{X} = \frac{\mathbf{FV}}{1 + \mathbf{i}_T}. \tag{24}$$

[11]Pomimo braku kapitalizacji w MOP zachowamy to nazewnictwo również dla tego przypadku.

[12]Może nią być lokata bankowa, zakup obligacji skarbu państwa.

Równanie (24) opisuje zjawisko *dyskonta prostego.* Miarą tego dyskonta jest wtedy różnica $\mathbf{FV}-\mathbf{PV}$ oznaczana przez $\mathbf{D}_T$. Informuje ona z jakiej części przyszłych środków jesteśmy skłonni zrezygnować, aby zamienić je w środki *wolne.* Wtedy *stopa dyskontowa* $\mathbf{i}_T$, z matematycznego punktu widzenia jest ilorazem wartości dyskonta do wartosci teraźniejszej kapitału[13], czyli

$$\mathbf{i}_T = \frac{\mathbf{D}_T}{\mathbf{PV}}. \tag{25}$$

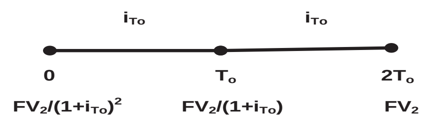
Uwaga 3 *Wzór (24) wykorzystuje się do celów ustalenia ZPK, o której była mowa w rozdziale 1. Mianowicie, mając dwie wartości datowane kapitału na chwilę*[14] T_1 *i* T_2, *gdzie np.* $T_1 < T_2$, *ZPK polega na tym, że obie wartości kapitału konwertuje się na chwilę bieżącą* 0, *czyli do wartości*

$$\frac{\mathbf{K}_{T_1}}{1+\mathbf{i}_1} \tag{26}$$

$$\frac{\mathbf{K}_{T_2}}{1+\mathbf{i}_2}, \tag{27}$$

gdzie $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ *oznaczają stopy dyskontowe za okres* $[0, T_1]$ *i odpowiednio* $[0, T_2]$. *Wtedy obie wartości dane wzorami (26) i (27) nazywamy wartościami bieżącymi kapitału.*

Z *dyskontem złożonym* mamy do czynienia wtedy, kiedy zjawisko dyskonta powtarzane jest co najmniej dwa razy. Wyjaśnia to poniższy rysunek,



Rysunek 3: zjawisko dyskonta złożonego

gdzie oczekiwania inwestora na koniec drugiego podokresu wynoszą $\mathbf{FV}_2$. Na koniec pierwszego podokresu, przy zadanej stopie dyskontowej równej $\mathbf{i}_{T_o}$ oznacza to, że inwestor musi dysponować kapitałem w wysokości $\frac{\mathbf{FV}_2}{1+\mathbf{i}_{T_o}}$. Z perspektywy

[13] Czytelnika prosi się o uzasadnienie tego faktu.
[14] Chwile te odnoszą się do przyszłości.

chwili bieżącej 0 oznacza to, że (przy założeniu tej samej stopy dyskontowej) na chwilę bieżącą musi posiadać $\frac{\mathbf{FV}_2}{(1+\mathbf{i}_{T_o})^2}$.

I ogólnie, w sytuacji kiedy na okres długości T składa się n podokresów długości T_o każdy, w każdym z podokresów obowiązuje ta sama stopa dyskontowa $\mathbf{i}_{T_o}$, to wartość bieżąca oczekiwanego kapitału $\mathbf{FV}_n$ wyniesie

$$\frac{\mathbf{FV}_n}{(1+\mathbf{i}_{T_0})^n}. \tag{28}$$

Jednym z ważniejszych zastosowań zjawiska dyskontowania są tzw. *dynamiczne metody oceny efektywności* bazujące na pojęciu *strumienia gotówki*, zwanego też *przepływem*. Zaczniemy od definicji.

Przez *strumień gotówki* $\mathbf{CF}$[15] rozumiemy ciąg datowanych wartości kapitału uprządkowanego rosnąco ze względu na czas pojawienia się. Będziemy pisali

$$\mathbf{CF} = (\mathbf{CF}_o, \mathbf{CF}_1, \mathbf{CF}_2, \ldots, \mathbf{CF}_n), \tag{29}$$

gdzie $\mathbf{CF}_o$ pojawia się na chwilę bieżącą, $\mathbf{CF}_1$ na chwilę T_1, itd., $\mathbf{CF}_n$ na chwilę T_n oraz $0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n$. Dla uproszczenia założymy, że w każdym z podokresów obowiązuje jednakowa stopa dyskontowa $\mathbf{i}$.

Wtedy, zgodnie z zasadą dyskontowania złożonego[16], *wartość bieżąca strumienia* oznaczana jako $\mathbf{NPV}$ wyniesie

$$\mathbf{NPV} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathbf{CF}_j}{(1+\mathbf{i})^j}. \tag{30}$$

Uwaga 4 *W sytuacji kiedy dla* $j = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{CF}_j = A$, *to będziemy mówili, że strumień* $\mathbf{CF}$ *jest strumieniem jednakowych płatności.*

Wykład zakończymy ilustracją wykorzystania techniki dyskontowania w bankowości na przykładzie tzw. *umorzenia kredytu wg. schematu annuitetowego.*

<u>Opis transakcji</u>

Bank (kredytodawca) udziela kredytobiorcy kredytu w wysokości $\mathbf{K}$ na następujących warunkach:

1. wypłata następuje w chwili 0;
2. spłata odbywa się w n ratach kapitałowo–odsetkowych, płatnych na koniec każdego podokresu w po upływie $T, 2T, \ldots, nT$ dni od chwili uruchomienia kredytu,

[15] Skrót od *cash flow.*

[16] Składniki $\mathbf{NPV}$ są jednakowo datowane–na chwilę bieżącą.

3. na j–tą ratę kapitałowo–odsetkową składają się: $\mathbf{K}_j$–część pożyczonego kapitału[17] oraz $\mathbf{O}_j$–należne bankowi odsetki naliczone za miniony podokres od aktualnego zadłużenia wg. określonej stopy zwrotu. Wtedy $\mathbf{A} = \mathbf{K}_j + \mathbf{O}_j$ nazywamy *ratą annuitetową*.

Problem sprowadza się do wyznaczenia wartości $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_j$ oraz $\mathbf{O}_j$, wiedząc że obowiązująca stopa $p.a.$ wynosi $\mathbf{R}$.

Rozwiązanie problemu.

1. Definiujemy strumień złożony z $n+1$ wyrazów
$$\mathbf{CF} = (-\mathbf{K}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}),$$
gdzie znak „-" oznacza *wypływ* kapitału z banku.

2. Określamy stopę dyskontową jako dostosowanie danej stopy $p.a.$ do okresu bazowego T transakcji, czyli
$$\mathbf{i} = \mathbf{R}\frac{T}{ldr}.$$

3. Bank ustala stopę $p.a.$ w taki sposób, aby na chwilę bieżącą wielkość udzielonego kredytu bilansowała się z sumą wszystkich zdyskontowanych wpływów[18]. Oznacza to, że zachodzi tzw. *równanie bankowe*
$$\mathbf{NPV} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{K} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{A}}{(1+\mathbf{i})^j}.$$
Z elementarnych własności postępu geometrycznego[19] wynika, że wtedy
$$\mathbf{A} = \mathbf{K}\frac{\mathbf{i}}{1 - \frac{1}{(1+\mathbf{i})^n}},$$
co pozwala wyliczyć wielkość raty annuitetowej.

4. Wyliczenie składników tej raty jest już łatwe–zostawiamy to Czytelnikowi.

[17] Oznacza to, że $\mathbf{K} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{K}_j$.

[18] Brak bilansu oznacza, że kredytobiorca nie dotrzymuje warunków umowy, np. płaci za mało lub (i) nie w terminie.

[19] Czytelnika prosi się o przedstawienie szczegółowego uzasadnienia.