

Wtedy, przy założeniu hipotezy zerowej $n_\alpha = 1,96$, i przedział krytyczny ma postać

$$Q = (-\infty, -1,96) \cup (1,96, +\infty).$$

Tymczasem $z_{obs} = \frac{2,083-2}{0,25} = 0,684 \notin Q$, co oznacza, że nie ma powodu do odrzucenia hipotezy zerowej.

Z drugiej strony biorąc

$$\mathbb{H}_0 : m = 1,9 \text{ przeciwko } \mathbb{H}_1 : m < 1,9$$

dostalibyśmy

$$\Phi(n_\alpha^+) = 1 - \alpha = 0,95, \text{ skąd } Q = (-\infty, -1,65).$$

Ponieważ teraz $z_{obs} = 1,46$, zatem również nie ma podstaw, aby nie przyjąć $m = 1,9$.

Okazuje się, że dopiero

$$\mathbb{H}_0 : m = 2,3 \text{ przeciwko } \mathbb{H}_1 : m < 2,3$$

daje $z_{obs} = -1,736 \in Q = (-\infty, -1,65)$, co oznacza, że hipotezę tę należy odrzucić. Jeśli pobrana próba była reprezentatywna, to oznacza to, że najprawdopodobniej wartość średnia cechy $\mathbb{X}$ jest mniejsza od 2,3.

Przykład 6.4.7 Cecha $\mathbb{X}$ populacji generalnej ma rozkład typu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Wtedy dla zweryfikowania hipotezy zerowej

$$\mathbb{H}_0 : m = m_o$$

wykorzystamy statystykę

$$t = \frac{\overline{\mathbb{X}}_n - m}{\mathbb{S}} \sqrt{n-1}.$$

Natomiast hipoteza alternatywna $\mathbb{H}_1$ i obszar krytyczny mają wtedy postać:
1.

$$\mathbb{H}_1 : m \neq m_o, \quad Q = (-\infty, -t_\alpha) \cup (t_\alpha, +\infty),$$

gdzie t_α , przy założeniu hipotezy $\mathbb{H}_0$ określone jest równaniem

$$P(\{\omega \in \Omega : |t_o|(\omega) \geq t_\alpha\}) = \alpha,$$

bowiem statystyka

$$t_o = \frac{\overline{\mathbb{X}}_n - m_o}{\mathbb{S}} \sqrt{n-1}$$

ma przy założeniu hipotezy zerowej rozkład t -Studenta o $n-1$ stopniach swobody.

2.

$$\mathbb{H}_1 : m > m_o, Q = (t_\alpha^+, +\infty)$$

gdzie t_α^+ , przy założeniu hipotezy $\mathbb{H}_o$ określone jest równaniem

$$P(\{\omega \in \Omega : t_o(\omega) \geq t_\alpha^+\}) = \alpha,$$

gdzie statystyka t_o jest identyczna, jak w sytuacji poprzedniej.

Dla przeprowadzenia symulacji odwołamy się do wyników z przykładu 6.4.2. Przypomnijmy, że wtedy

$$m \in (1,899, 2,267), \bar{x}_4 = 2,083, s = 0,1.$$

Ponieważ z tabeli rozkładu t -Studenta dla trzech stopni swobody $t_\alpha = 3,182$, więc biorąc

$$\mathbb{H}_o : m = 2 \text{ przeciwko } \mathbb{H}_1 : m \neq 2$$

obszar krytyczny będzie miał postać

$$Q = (-\infty, -3,182) \cup (3,182, +\infty).$$

Tymczasem

$$t_{obs} = \frac{2,083 - 2}{0,1} 1,73 = 1,4359 \notin Q,$$

co oznacza, że nie ma powodu, aby odrzucić hipotezę zerową.

Sprawdźmy, czy dla tej próby prostej można przyjąć, że $m = 1,9$.

W tym celu weźmy

$$\mathbb{H}_o : m = 1,9 \text{ przeciwko } \mathbb{H}_1 : m > 1,9.$$

Ponieważ teraz $t_\alpha^+ = 2,4$, to $Q = (2,4, +\infty)$.

Ale $t_{obs} = \frac{2,083 - 1,9}{0,1} 1,73 = 3,1659 \in Q$, co oznacza, że hipotezę zerową należy odrzucić.

Zauważmy, że wartość 1,9 też należy do przedziału wartości średniej wyznaczonego metodą estymacji.

Na koniec pokażemy przykładowy test dla wariancji.

Przykład 6.4.8 Cecha $\mathbb{X}$ populacji generalnej ma rozkład typu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Wtedy dla zweryfikowania hipotezy zerowej

$$\mathbb{H}_o : \sigma = \sigma_o$$

wykorzystamy statystykę

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}.$$

Natomiast hipoteza alternatywna $\mathbb{H}_1$ i obszar krytyczny mają wtedy postać:

$$\mathbb{H}_1 : \sigma > \sigma_o, \text{ (ponieważ } \sigma > 0), \quad Q = (\chi_\alpha^2, +\infty),$$

gdzie przy założeniu hipotezy zerowej statystyka

$$\chi_o^2 = \frac{nS_o^2}{\sigma_o^2}$$

ma rozkład chi-kwadrat o $n - 1$ stopniach swobody, a χ_α^2 jest rozwiązaniem równania

$$P(\{\omega \in \Omega : \chi_o^2(\omega) > \chi_\alpha^2\}) = \alpha.$$

Stosowną symulację przeprowadzimy, wykorzystując wyniki z Przykładu 6.4.4. Dostaliśmy tam wówczas

$$\sigma^2 \in (0,0002, 0,267), \quad s^2 = 0,1, \quad \alpha = 0,1.$$

Przeprowadźmy test dla środka tego przedziału, tzn. niech

$$\mathbb{H}_o : \sigma = 0,366 \text{ przeciwko } \mathbb{H}_1 : \sigma > 0,366.$$

Ponieważ $\chi_\alpha^2 = 1,0636$, więc $Q = (1,0636, +\infty)$.

Ale

$$\chi_{obs}^2 = \frac{50,0377}{0,1336} = 374,53 \in Q,$$

co pokazuje, że należy odrzucić hipotezę zerową na korzyść H_1 .

Bardzo często spotykamy się z problemem potrzeby porównania ze sobą dwóch różnych populacji generalnych. Możemy na przykład mieć do czynienia z populacją ludzi chorych i zdrowych, ludzi czynnych zawodowo i emerytów itd. Chcielibyśmy takie populacje ze sobą porównać pod kątem wyróżnionej cechy, na przykład w drugiej sytuacji może nią być preferencja wyborcza, którą oznaczmy przez $\mathbb{X}$. Zbudujemy model statystyczny dla takiej sytuacji. W modelu tym zakłada się, że na przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) mamy dwie zmienne losowe X i Y , których rozkłady opisują cechę $\mathbb{X}$ dla populacji pierwszej i drugiej. Pobieramy materiał statystyczny z obu populacji w ten sposób, że otrzymane próby proste są stochastycznie niezależne i mają postać:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (X_1, X_2, \dots, X_n)(\omega_o)$$