Metody badania zbieżności/rozbieżności ciągów liczbowych

Ryszard Rębowski *

14 grudnia 2017

1 Wstęp

Kluczowe pytanie odnoszące się do zagadnienia badania zachowania się ciągu liczbowego sprowadza się do sposobu opisu zachowania się jego *ogona*. Przypomnijmy, że przez tzw. *ogon* ciągu $(a_n)_{n\geqslant 1}$ rozumiemy wszystkie wyrazy o numerach $n \geqslant n_o$, dla pewnego naturalnego n_o. Wtedy zachowanie się *ogona* determinuje *asymptotyczne* zachowanie się ciągu.

Dalej przyjmiemy założenie, że rozważane ciągi będą albo zbieżne, albo rozbieżne, co oznacza, że z analizy wykluczymy ciągi, które nie są ani zbieżne, ani rozbieżne. Niech $\mathcal{C}$ oznacza mnogość takich ciągów. Możemy sformułować dwa podstawowe problemy, rozwiązaniem których zajmiemy się w dalszej części.

Problem 1 *Niech $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathcal{C}$. Należy rozstrzygnąć kwestię, czy dany ciąg jest zbieżny, czy jest rozbieżny.*

Problem 2 *Wiedząc, że $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathcal{C}$ jest zbieżny należy ustalić jego granicę. W przypadku jego rozbieżności należy określić typ tej rozbieżności.*

*Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, e–mail: rebowskir@pwsz-legnica.eu

2 Badanie ciągów zbieżnych

Przedstawimy trzy metody badania zbieżności ciągów: *twierdzenie o arytmetyce granic* (TAG), *twierdzenie o 3 ciągach* (T3C) oraz *twierdzenie o liczbie Eulera* (TLE). Jak zobaczymy dalej, żadne z tych twierdzeń nie jest na tyle uniwersalne, aby mogło rozstrzygnąć kwestię zbieżności każdego ciągu. Dlatego ważna będzie dalej umiejętność doboru odpowiedniego twierdzenia do badanego ciągu, na co zwrócimy szczególną uwagę.

2.1 TAG

Zaczniemy od definicji wyjaśniającej pojęcie *struktury arytmetycznej* ciągu.

Definicja 1 *Powiemy, że ciąg* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *posiada strukturę arytmetyczną, jeśli istnieją dwa ciągi* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *i* $(c_n)_{n\geqslant 1}$ *takie, że* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *ma jedną z poniższych postaci:*

1.
$$a_n = b_n + c_n, \ \text{dla } n \geqslant 1. \tag{1}$$
Wtedy powiemy, że jest on sumą ciągów $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *i* $(c_n)_{n\geqslant 1}$,

2.
$$a_n = b_n - c_n, \ \text{dla } n \geqslant 1. \tag{2}$$
Wtedy powiemy, że jest on różnicą ciągów $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *i* $(c_n)_{n\geqslant 1}$,

3.
$$a_n = b_n c_n, \ \text{dla } n \geqslant 1. \tag{3}$$
Wtedy powiemy, że jest on iloczynem ciągów $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *i* $(c_n)_{n\geqslant 1}$,

4.
$$a_n = \frac{b_n}{c_n}, \ \text{o ile dla } n \geqslant 1 \ c_n \neq 0. \tag{4}$$
Wtedy powiemy, że jest on ilorazem ciągów $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *i* $(c_n)_{n\geqslant 1}$,

Przykład 1 *Każdy z poniższych ciągów ma strukturę arytmetyczną:*

$$a_n = \frac{n^5 + 2n^2 - 1}{5n^5 - 3n}, \ n \geqslant 1, \tag{5}$$

$$a_n = \sqrt{n^2 - 4n + 3} - \sqrt{n^2 + n + 1}, \ n \geqslant 3, \tag{6}$$

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \ n \geqslant 1, \tag{7}$$

Przykład 2 *Nie każdy ciąg ma strukturę arytmetyczną, np.:*

$$a_n = \sin\frac{1}{n}, \ n \geqslant 1, \tag{8}$$

$$a_n = \sqrt[n]{2}, \ n \geqslant 1, \tag{9}$$

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}, \ n \geqslant 1, \tag{10}$$

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{4n-1}, \ n \geqslant 1. \tag{11}$$

Twierdzenie 1 *(TAG)*
Niech ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ma strukturę arytmetyczną typu (1) – (3), gdzie ciągi $(b_n)_{n\geqslant 1}$ i $(c_n)_{n\geqslant 1}$ są zbieżne. Wtedy $(a_n)_{n\geqslant 1}$ też jest zbieżny. Co więcej, jeśli $b_n \longrightarrow b$, $c_n \longrightarrow c$, to odpowiednio $a_n \longrightarrow b+c$, $a_n \longrightarrow b-c$, $a_n \longrightarrow bc$. Jeśli dodatkowo $c \neq 0$, to ciąg typu (4) też jest zbieżny i $a_n \longrightarrow \frac{b}{c}$.

Przykład 3 *Zbadać charakter zbieżności ciągu danego wzorem (5).*

Rozwiązanie. Wiemy, że $a_n = \frac{n^5+2n^2-1}{5n^5-3n}$, $n \geqslant 1$ ma strukturę arytmetyczną–jako iloraz dwóch ciągów $b_n = n^5+2n^2-1$ oraz $c_n = 5n^5-3n$, $n \geqslant 1$. Ponieważ $b_n \geqslant n^5$ dla $n \geqslant 1$ i ciąg n^5 nie jest ograniczony z góry, ciąg $(b_n)_{n\geqslant 1}$ jest nieograniczony i dlatego nie może być zbieżny. Oznacza to, że pomimo dopuszczalnej struktury, nie możemy zastosować TAG dla badanego ciągu. Z drugiej strony, z oszacowania[1]

$$\frac{1}{6} = \frac{n^5}{6n^5} \leqslant a_n \leqslant \frac{2n^5}{2n^5} = 1, \ n \geqslant 1,$$

wynika, że badany ciąg jest ograniczony. W takim razie, zgodnie z umową zawartą we wstępie jest zbieżny. Jak to uzasadnić, skoro nie działa TAG. Odpowiedź jest tylko jedna – należy inaczej zapisać postać wyrazu a_n.

Zauważmy, że[2]

$$a_n = \frac{1 + 2\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^5}}{5 - 3\frac{1}{n^4}}, \ n \geqslant 1.$$

Teraz TAG zadziała, bowiem ciąg $1 + 2\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^5}$ ma strukturę typu (1) i (2) oraz z własności ciągu α–harmonicznego, $1+2\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^5} \longrightarrow 1+0-0 = 1$. Podobnie dla $5 - 3\frac{1}{n^4} \longrightarrow 5 - 0 = 5 \neq 0$.

Dlatego z TAG

$$a_n \longrightarrow \frac{1}{5}.$$

[1] Czytelnik powinien umieć uzasadnić to oszacowanie.
[2] Należy to uzasadnić.

Przykład 4 *Zbadać charakter zbieżności ciągu danego wzorem (6).*

Rozwiązanie. Z Przykładu 1 wiemy, że badany ciąg również posiada strukturę arytmetyczną. Ponieważ jednak

$$\sqrt{n^2+n+1} > n,$$

również w tym przypadku TAG nie może być zastosowane. Jednocześnie mamy podobną sytuację do ciągu z przykładu powyżej – badanych ciąg jest ograniczony[3]. W takim razie, jako element zbioru $\mathcal{C}$ jest zbieżny. Wykażemy to dokonując przeformatowania jego zapisu.

Zauważmy, że

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2-4n+3} - \sqrt{n^2+n+1}\right)\left(\sqrt{n^2-4n+3} + \sqrt{n^2+n+1}\right)}{\sqrt{n^2-4n+3} + \sqrt{n^2+n+1}},$$

czyli[4]

$$a_n = \frac{-5n+2}{\sqrt{n^2-4n+3} + \sqrt{n^2+n+1}} = \frac{-5+2\frac{1}{n}}{\sqrt{1-4\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}.$$

Dalej będziemy potrzebowali pewnego wspomagającego faktu.[5]

Fakt 1 *Przypuśćmy, że dla ciągu $(d_n)_{n\geqslant 1}$ wiadomo, że: wyrazy jego są nieujemne oraz $d_n \longrightarrow d$. Wtedy $d \geqslant 0$ oraz $\sqrt{d_n} \longrightarrow \sqrt{d}$.*

Korzystając teraz z Faktu 1 oraz z TAG możemy napisać

$$a_n \longrightarrow \frac{-5+0}{\sqrt{1-0+0} + \sqrt{1+0+0}} = \frac{-5}{2}.$$

Przykład 5 *Zbadać charakter zbieżności ciągu danego wzorem (7).*

Rozwiązanie. Nie można zastosować TAG, pomimo, że ciąg ma strukturę arytmetyczną.[6] Badany ciąg jest jednak ograniczony, zatem przy obowiązującym założeniu jest zbieżny. Tym razem jednak procedura wstępnego przeformatowania, z jaką spotkaliśmy się w przykładach 3 i 4 nie zadziała. Jak tym razem w takim razie uzasadnić zbieżność badanego ciągu?

Zauważmy, że

$$\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

co oznacza, że $|a_n| \longrightarrow 0$.

Dalej potrzebujemy kolejnego faktu[7].

[3]Czytelnik powienien to umieć uzasadnić!

[4]Należy to uzasadnić.

[5]Czytelnik powinien zapoznać się z dowodem tego faktu.

[6]Proszę uzasadnić dlaczego.

[7]Proszę zapoznać się z dowodem.

Fakt 2 *Dla każdego ciągu $(a_n)_{n\geqslant 1}$ następujące warunki są równoważne:*

1. $$|a_n| \longrightarrow 0.$$

2. $$a_n \longrightarrow 0.$$

Dlatego $(-1)^n\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

2.1.1 Ćwiczenia

Zadanie 1

Zbadać zbieżność ciągu $a_n = \frac{\sqrt[3]{8^{n+1}+3}}{2^n+1}$, $n \geqslant 1$.

Zadanie 2

Zbadać zbieżność ciągu $a_n = \frac{(n^{20}+2)^3}{(n^3+1)^{20}}$, $n \geqslant 1$.

Zadanie 3

Zbadać zbieżność ciągu $a_n = \sqrt{n^2+4n} - n$, $n \geqslant 1$.

2.2 T3C

Przykład 2 pokazuje, że nie każdy ciąg posiada strukturę arytmetyczną. Z tego powodu zasięg zastosowania TAG jest ograniczony. Dla potrzeb badania takich ciągów potrzebne są kolejne metody. Jedną z nich jest zaprezentowana poniżej *metoda trzech ciągów.*

Przypuśćmy, że położenia ogona badanego ciągu $(a_n)_{n\geqslant 1}$ możemy kontrolować pośrednio używając do tego celu dwóch dodatkowych ciągów (łącznie mamy zatem trzy ciągi) $(b_n)_{n\geqslant 1}$ i $(c_n)_{n\geqslant 1}$ w sposób następujący

$$\forall_{n\geqslant n_o}\ b_n \leqslant a_n \leqslant c_n. \tag{12}$$

Jeśli teraz ciągi $(b_n)_{n\geqslant 1}$ i $(c_n)_{n\geqslant 1}$ są zbieżne, czyli $b_n \longrightarrow b$ i $c_n \longrightarrow c$ oraz $b = c$, to z warunku (12) wynika, że ogon ciągu $(a_n)_{n\geqslant 1}$ znajduje się w dowolnym otoczeniu liczby $a = b = c$. Prowadzi to do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2 *(T3C)*
Niech dla ciągu $(a_n)_{n\geqslant 1}$ istnieją takie ciągi $(b_n)_{n\geqslant 1}$ i $(c_n)_{n\geqslant 1}$, dla których zachodzi warunek (12). Wtedy, jeśli $b_n \longrightarrow b$ i $c_n \longrightarrow c$ oraz $b = c$, to ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny oraz $a_n \longrightarrow a = b = c$.

Przykład 6 *Zbadać zbieżność ciągu danego wzorem (8).*

Rozwiązanie. Z własności funkcji trygonometrycznej sin, ciąg $\sin\frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ jest ograniczony. Zatem, zgodnie z założeniem należy do klasy $\mathcal{C}$, czyli jest zbieżny. Do wyznaczenia jego granicy nie możemy zastosować TAG, bowiem nie posiada on struktury arytmetycznej. Granicę tę wyznaczymy metodą pośrednią – zastosujemy T3C.

Z podstawowej własności funkcji sin wiadomo, że $\sin x \leqslant x$ dla $x \geqslant 0$ oraz dla kątów z przedziału $x \in [0, \pi/2]$, $\sin x \geqslant 0$. W takim razie dla badanego ciągu możemy napisać następujące oszacowanie

$$0 \leqslant \sin\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}, \text{ dla } n \geqslant 1,$$

co na mocy T3C dowodzi, że $\sin\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

Przykład 7 *Zbadać charakter zbieżności ciągu $\sqrt[n]{2}$, $n \geqslant 1$ z przykładu 2.*

Rozwiązanie. Z własności działania pierwiastkowania wynika, że $\sqrt[n]{2} \geqslant 1$ dla każdego $n \geqslant 1$. W takim razie możemy napisać

$$\sqrt[n]{2} = 1 + \varepsilon_n, \text{ gdzie } \varepsilon_n \geqslant 0 \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Jeśli wykażemy, że zdefiniowany powyżej ciąg $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny do zera, to z TAG będzie wynikało, że $\sqrt[n]{2} \longrightarrow 1$. W tym celu skorzystamy z T3C. Zauważmy, że z definicji $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ możemy napisać

$$2 = (1 + \varepsilon_n)^n, \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Dalej będziemy potrzebowali pewnej nierówności.[8]

Fakt 3 *(Nierówność Bernoulliego)*
Dla każdej liczby rzeczywistej $a \geqslant -1$, liczby naturalnej n

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + na. \tag{13}$$

W takim razie dla ciągu $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ mamy oszacowanie[9]

$$0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{n},$$

skąd i z T3C wynika, że $\varepsilon_n \longrightarrow 0$.

[8] Proszę zapoznać się z dowodem.
[9] Należy to uzasadnić.

Przykład 8 *Zbadać charakter zbieżności ciągu danego wzorem (10).*

Rozwiązanie. Zauważymy, że badany ciąg jest ograniczony, bowiem

$$3 \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leqslant \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{2},$$

oraz z przykładu 7 ciąg $\sqrt[n]{2}$ jako zbieżny jest ograniczony. Ponieważ $\sqrt[n]{2} \longrightarrow 1$, z T3C ostatnie oszacowanie oznacza, że $\sqrt[n]{2^n + 3^n} \longrightarrow 3$.

2.2.1 Ćwiczenia

Zadanie 4

Zbadać zbieżność ciągu $\sqrt[n]{4^n + 7^n + 11^n}$, $n \geqslant 1$.

Zadanie 5

Wyznaczyć granice ciągu $\frac{2n+(-1)^n}{3n+2}$, $n \geqslant 1$.

Zadanie 6

Wyznaczyć granicę ciągu $\sqrt[n]{n2^n + 1}$, $n \geqslant 1$.

Zadanie 7

Obliczyć granicę ciągu $\sqrt[n]{2 + \sin n}$, $n \geqslant 1$.

Zadanie 8

Zbadać zbieżność ciągu $\sqrt[n]{a}$, $n \geqslant 1$, gdzie $a > 0$.

2.3 TLE

Asymptotyczne zachowanie się ciągu opisuje się za pomocą trzech własności: monotoniczności, ograniczoności i zbieżności (rozbieżności). Dobrze znane przykłady[10] pokazują, że nie ma związku pomiędzy monotonicznością a ograniczonością oraz pomiędzy zbieżnością (rozbieżnością) a monotonicznością. Jeśli jednak w odpowiedni sposób skompiluje się własność ograniczoności z monotonicznością, to otrzyma się efekt zbieżności lub rozbieżności ciągu.

Na przykład:[11]

1. każdy ciąg niemalejący i ograniczony z góry jest zbieżny;
2. każdy ciąg malejący i nieograniczony z dołu jest rozbieżny.

W szczególności, oznacza to, że każdy ciąg monotoniczny jest albo zbieżny albo rozbieżny, czyli należy do zbioru $\mathcal{C}$. Klasycznym przykładem jest tutaj tzw. *ciąg Eulera* $(e_n)_{n\geqslant 1}$, gdzie $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, który jest rosnący i ograniczony z góry.

Fenomen tego ciągu polega na tym, że jego granicą nie jest liczba wymierna – jest nią liczba niewymierna[12], tzw. *liczba Eulera* oznaczana literą e.

[10]Proszę je przypomnieć.
[11]Proszę sformułować pozostałe przypadki.
[12]Jej przybliżona wartość to 2,71.

Poniższe twierdzenie pokazuje, że istnieje cała klasa ciągów, które zachowują się podobnie do ciągu Eulera, czyli są zbieżne do e.

Twierdzenie 3 *(TLE)*
Każdy ciąg postaci

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n},$$

gdzie $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ *jest dowolnym ciągiem rozbieżnym, jest zbieżny do liczby Eulera.*

Dalej o ciągu $\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}$, $n \geqslant 1$ będziemy mówili, że ma strukturę ciągu Eulera.

Przykład 9 *Zbadać zbieżność ciągu danego wzorem (11).*

Rozwiązanie. Kwestią kluczową jest umiejętność dostrzeżenia w definicji badanego ciągu struktury ciągu Eulera. W tym celu zajmiemy się najpierw podstawą potęgi. Zauważmy, że

$$\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{2n-1+2}{2n-1} = 1+\frac{2}{2n-1} = 1+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}.$$

Definiujemy ciąg $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$, gdzie $\alpha_n = n-\frac{1}{2}$. Wtedy, ponieważ $n=\alpha_n+\frac{1}{2}$, badany ciąg ma strukturę

$$\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{4n-1} = \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{4\alpha_n+2},$$

co po przekształceniach daje

$$\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{4n-1} = \left[\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\right]^4 \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^2.$$

Uzyskana faktoryzacja badanego ciągu pozwala zastosować TLE. Pierwszy czynnik na mocy TLE i TAG zbieżny jest do e^4. Drugi czynnik, na mocy TAG ma granicę równą 1[13]. Dlatego na mocy TAG badany ciąg jest zbieżny do e^4.

2.3.1 Ćwiczenia

Zadanie 9

Obliczyć granicę ciągu $\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n}$, $n \geqslant 1$.

Zadanie 10

Obliczyć granicę ciągu $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$, $n \geqslant 1$.

Zadanie 11

Zbadać zbieżność ciągu $\left(\frac{n^2}{1=n^2}\right)^{n^2}$, $n \geqslant 1$.

[13]Proszę to uzasadnić.

3 Badanie ciągów rozbieżnych

Przykład 10 *Weźmy szereg harmoniczny* $\Sigma\frac{1}{n}$, *czyli ciąg* $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $n \geqslant 2$. *Zbadać zachowanie się jego ogona.*

Rozwiązanie. Ponieważ

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1},$$

ciąg sum częściowych szeregu harmonicznego jest rosnący. Można pokazać,[14] że nie jest on ograniczony z góry. W takim razie jest on rozbieżny przez wartości dodatnie, co możemy zapisać jako $S_n \longrightarrow +\infty$ lub $\Sigma\frac{1}{n} = +\infty$.

Badanie rozbieżności ciągu sprowadza się do ustalenia położenia jego ogona w otoczeniu tzw. *nieskończoności*, czyli albo dowolnie daleko na prawo od zera, albo dowolnie daleko na lewo od zera. Oznacza to, że do ustalenia takiego położenia, z punktu widzenia *metody porównanwczej* wystarczy dysponować tylko jednym (dodatkowym) ciągiem rozbieżnym. Prowadzi to do tzw. *twierdzenia o dwóch ciągach* (T2C).

Twierdzenie 4 *(T2C)*
Jeśli dla ciągu $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *położenie jego ogona daje się ustalić jedną z metod:*

- $$a_n \leqslant b_n, \text{ dla } n \geqslant n_o,$$

  albo

- $$c_n \leqslant a_n, \text{ dla } n \geqslant n_o,$$

  gdzie $b_n \longrightarrow -\infty$, *albo* $c_n \longrightarrow +\infty$, *to* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *jest rozbieżny odpowiednio przez wartości ujemne albo dodatnie.*

Przykład 11 *Zbadać zachowanie się ogona ciągu* $\sqrt[n]{n^n + 5}$, $n \geqslant 1$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\sqrt[n]{n^n + 5} \geqslant \sqrt[n]{n^n} = n, \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Ponieważ ciąg o wyrazie n jest rozbieżny przez wartości dodatnie, z T2C, badany ciąg również. Oznacza to, że ogon badanego ciągu znajduje się w otoczeniu $+\infty$.

Przykład 12 *Zbadać zachowanie się ciągu* $\frac{5^n+7^n}{3^n+5^n}$, $n \geqslant 1$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla $n \geqslant 1$ mamy oszacowanie

$$\frac{5^n + 7^n}{3^n + 5^n} \geqslant \frac{7^n}{2 \cdot 5^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}\right)^n.$$

Oznacza to, że badany ciąg dominuje z góry ciąg geometryczny o ilorazie większym od jeden. Z T2C badany ciąg jest rozbieżny przez wartości dodatnie.

[14] Proszę to zrobić.

3.1 Ćwiczenia

Zadanie 12

Ustalić charakter rozbieżności ciągu $(3+(-1)^n)^n,\ n \geqslant 1$.

Zadanie 13

Uzasadnić, że następujący ciąg $(\sin n - 2)n^2,\ n \geqslant 1$ jest rozbieżny.

Zadanie 14

Zbadać zachowanie się ogona ciągu $n^n,\ n \geqslant 1$.