Oczywiście rodzina nasza nie jest σ-algebrą. Aby znaleźć najmniejszą σ-algebrę zawierającą $\mathcal{R}$, należy ją powiększyć o brakujące zbiory. Wprost z definicji wynika, że musi to być zbiór pusty oraz dopełnienia elementów tej rodziny. W wyniku powiększenia dostaniemy wtedy rodzinę

$$\{\emptyset,\ \{0\},\ \{2,\ 4,\ 6\},\ \Omega,\ \{2,\ 4,\ 6,\ 8\},\ \{0,\ 8\}\}.$$

Zauważmy, że powstała rodzina dalej nie jest σ-algebrą–nie jest zamknięta na branie sum mnogościowych. Należy ją uzupełnić o zbiór

$$\{0\} \cup \{2,\ 4,\ 6\} = \{0,\ 2,\ 4,\ 6\}$$

i jego dopełnienie $\{8\}$. Z konstrukcji wynika, że tak powstała rodzina $\mathcal{S}$ jest już σ-algebrą. Pozostało uzasadnić, że jest najmniejszą rodziną o tej własności.
W tym celu weźmy σ-algebrę $\mathcal{A}$ zawierającą rodzinę $\mathcal{R}$. Z definicji wynika, że musi ona zawierać również naszą powiększoną rodzinę, która jest σ-algebrą, co kończy dowód.

1.2 Zadania

Zadanie 1.2.1 *Niech*
A będzie zbiorem punktów (x, y), dla których $x^2 + y^2 < 4$,
B–zbiorem punktów (x, y), dla których $x^2 + y^2 < 9$,
C–zbiorem punktów (x, y), dla których $(x-1)^2 + (y+1)^2 < 1$.
Znaleźć zbiory:

$$A \cup B,\ A \cup C,\ B \cup C,\ A \cup B \cup C,\ A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C,\ A \cap B \cap C,$$

$$A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \setminus C.$$

Zadanie 1.2.2 *W loterii znajdują się losy puste i wygrywające. Kupujemy trzy losy. Niech*
A oznacza zdarzenie: dokładnie jeden los wygrywa,
B–co najwyżej jeden los wygrywa,
C–co najmniej jeden los wygrywa.
Wyjaśnić, co oznaczają zdarzenia A^C, B^C, C^C, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $B^C \cap C^C$.

Zadanie 1.2.3 *Niech A będzie zbiorem tych studentów Twojej grupy, których nazwisko zaczyna się od litery K,M lub P, B–zbiorem tych, którzy mają trójkę z matematyki, a C–zbiorem tych, którzy otrzymują stypendium za wyniki w nauce. Zapisać za pomocą działań na zbiorach A, B, C następujące zbiory studentów:*

1. *zbiór studentów, których nazwisko zaczyna się od litery K,M lub P, mają trójkę z matematyki oraz otrzymują stypendium za wyniki w nauce,*

2. *zbiór tych studentów, których nazwisko zaczyna się od litery K,M lub P oraz mają trójkę z matematyki lub otrzymują stypendium za wyniki w nauce,*

3. *zbiór tych studentów, których nazwisko nie zaczyna się od litery K,M lub P, mają trójkę z matematyki i nie otrzymują stypendium za wyniki w nauce,*

4. *zbiór tych studentów, których nazwisko zaczyna się od litery K,M lub P, nie mają trójki z matematyki ani nie otrzymują stypendium za wyniki w nauce.*

Zadanie 1.2.4 *Korzystając z praw de Morgana, zapisz* $A \cap B$ *wyłącznie przy pomocy operacji sumy i dopełnienia.*

Zadanie 1.2.5 *Dane są zbiory* $A = \{a, b, c\}$ *oraz* $B = \{1, 2\}$. *Wyznaczyć* $A \times B$ *oraz* $B \times A$.

Zadanie 1.2.6 *Udowodnić, że jeśli zbiór* A *ma* n *elementów, zbiór* B *ma* m *elementów, to* $A \times B$ *ma* $n \cdot m$ *elementów.*

Zadanie 1.2.7 *Zbiory* A *i* B *są zbiorami zawartymi w pewnej 20-to elementowej przestrzeni. Wiemy, że zbiór* A *ma 7 elementów, zbiór* B*–8 elementów, a ich część wspólna ma 3 elementy. Z ilu elementów składają się zbiory:* $A \cup B$, $A^C \cup B^C$, $A \setminus B$, $A^C \cap B$*?*

Zadanie 1.2.8 *Niech* $\Omega = [-1, 1]$. *Znaleźć najmniejszą* σ*-algebrę* $\mathcal{S}$ *zawierającą rodzinę* $\mathcal{R} = \{[-1, -\frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, 0]\}$.

Zadanie 1.2.9 *Niech* $X = [0, 1]$ *będzie przestrzenią. Dane są zbiory* $A = [0, \frac{1}{2})$ *oraz* $B = (\frac{1}{4}, 1]$.

1. *Wyznaczyć zbiory* $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, A^C, B^C.

2. *Uzupełnić rodzinę* $\mathcal{A} = \{A, B\}$ *tak, aby była algebrą.*

Zadanie 1.2.10 *Ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *losujemy bez zwracania kolejno trzy cyfry i tworzymy liczbę trzycyfrową w ten sposób, że pierwsza wylosowana cyfra oznacza liczbę setek, druga–liczbę dziesiątek i trzecia–liczbę jedności. Za zdarzenie elementarne przyjmujemy liczbę w ten sposób uzyskaną. Wypisać wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające danemu zdarzeniu, jeśli zdarzenie polega na tym, że otrzymana liczba jest:*

1. *wielokrotnością liczby 25;*

2. *mniejsza od 200 i podzielna przez 5;*

3. *kwadratem pewnej liczby naturalnej;*

4. *kwadratem pewnej liczby naturalnej lub jest wielokrotnością liczby 25;*

5. *kwadratem pewnej liczby naturalnej i wielokrotnością liczby 25;*

6. *wielokrotnością liczby 25 i nie jest kwadratem żadnej liczby naturalnej;*

7. *kwadratem pewnej liczby naturalnej i nie jest wielokrotnością liczby 25.*

Zadanie 1.2.11 *Dane są 4 zdarzenia losowe A, B, C i D przestrzeni wszystkich zdarzeń elementarnych Ω. Zapisać za pomocą odpowiednich działań zdarzenie:*

1. *E polegające na tym, że wystąpiły tylko zdarzenia A i B;*

2. *F polegające na tym, że nie wystąpiło żadne zdarzenie;*

3. *G polegające na tym, że wystąpiło zdarzenie A i nie wystąpiły zdarzenia B, C, D;*

4. *H polegające na tym, że wystąpiło tylko zdarzenie spośród zdarzeń A, B, C, D.*

Zadanie 1.2.12 *Dane są zdarzenia losowe A,B i C w przestrzeni wszystkich zdarzeń elementarnych Ω. Wykazać równości:*

1. $A - (B \cup C) = (A - B) - C$;

2. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

Zadanie 1.2.13 *Wykonujemy trzykrotny rzut symetryczną monetą. Zdarzenie elementarne to trójka (x, y, z), gdzie $x, y, z \in \{o,r\}$, gdzie o oznacza, że wyrzuciliśmy orła, r– wyrzuciliśmy reszkę. Niech A_i będzie zdarzeniem elementarnym polegającym na tym, że reszka wypadła tylko w i-tym rzucie, $i = \{1, 2, 3\}$. Wyznaczyć: Ω, A_1, A_2, A_3.*
Co oznacza zdarzenie:

1. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

2. $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;

3. $A_1^C \cup A_2^C \cup A_3^C$;

4. $A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C$?

Zadanie 1.2.14 *Rzucamy dwa razy symetryczną monetą. W sytuacji gdy otrzymamy dwukrotnie tę samą stronę monety, rzucamy po raz trzeci. Za zdarzenie elementarne uważamy uporządkowane dwójki lub trójki wyników poszczególnych rzutów. Wyznaczyć Ω.*

Zadanie 1.2.15 *Z talii 52 kart wybieramy 4. Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowaliśmy co najmniej jednego asa, B–wylosowaliśmy co najwyżej jednego asa czarnego, C–wylosowaliśmy dwa asy.*
Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia. Co oznaczają zdarzenia: $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C^C$, $A \cup B \cup C$, $A^C \cap B^C$*?*

Zadanie 1.2.16 *Z badań statystycznych wynika, że w pewnej grupie studentów 50% gra w koszykówkę, 60% w siatkówkę, 50% w piłkę nożną, 30% w koszykówkę oraz siatkówkę, 20% w siatkówkę i piłkę nożną, 30% w koszykówkę i piłkę nożną. 10% studentów uprawia wszystkie trzy dyscypliny sportowe. Jaki procent studentów uprawia dokładnie dwie gry zespołowe? Jaki procent nie uprawia żadnej gry?*

Zadanie 1.2.17 *W pewnej wsi mieszka 300 osób, z których każdy śpiewa, tańczy lub gra na gitarze. Połowa grających na gitarze tańczy, połowa tańczących śpiewa, a połowa śpiewających gra na gitarze. Wiemy, że żaden z grających na gitarze nie śpiewa i tańczy. Ile osób śpiewa, tańczy, a ile gra na gitarze?*

Zadanie 1.2.18 *Z badań statystycznych wynika, że wśród 200 ankietowanych 130 posiada psa, 80–kota, a 53–rybki. Nikt nie posiada wszystkich trzech zwierząt, ale mniej niż 40 spośród ankietowanych posiada dwa zwierzątka. Czy wyniki ankiety są rzetelne?*

Zadanie 1.2.19 *Wybieramy losowo studenta drugiego roku. Niech zdarzenie A polega na tym, że jest to kobieta, B–wybrana osoba uczęszcza na lektorat z języka angielskiego, C–wybrany student jest mieszkańcem Legnicy.*
Opisać słownie zdarzenia: $A \cap B^C$, $A \cap B \cap C^C$.
Przy jakich warunkach będzie zachodzić równość, że $A \cap B = A$*? Kiedy zachodzi równość* $A^C = B$*?*

Zadanie 1.2.20 *Z odcinka* $[0, 2]$ *wybieramy losowo i niezależnie dwa punkty. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że odległość między nimi jest mniejsza od 1. Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia. Opisać zdarzenie A.*

Zadanie 1.2.21 *Z odcinka* $[0, k]$ *wybieramy losowo i niezależnie punkty x i y. Niech A–zdarzenie polegające na tym, że* $x^2 + y^2 > \frac{k^2}{4}$*, B–zdarzenie, że funkcja* $ln(x^2 + y^2 - k)$ *jest dobrze określona.*

1. *Opisać* A, B *i* Ω.

2. *Wyznaczyć* $|A|$, $|B|$ *i* $|\Omega|$.