Metoda Simplex bez użycia tabel simplex

29 kwietnia 2010

1 Wprowadzenie

Powszechnie uważa się, że *metoda simplex*, jako uniwersalny algorytm pozwalający znaleźć rozwiązanie optymalne *zagadnienia programowania liniowego* (ZPL) nierozłącznie związana jest z *tabelami simplex*. Poniżej pokażemy, że algorytm ten można zrealizować w sposób bardziej intuicyjny. Z wiadomych powodów ograniczymy się do ilustracji metody na przykładach.

Będziemy zakładali, że ZPL typu $m \times n$ dane jest w postaci standardowej, a więc w notacji macierzowej wygląda następująco:

$$\mathbf{R}^n \supset D \ni \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{cx} \to max,$$

gdzie

$$\mathbf{x} \in D \Leftrightarrow \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, G\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

oraz $\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{0}, \mathbf{c}$, G oznaczają odpowiednio macierze stopnia: $n \times 1, m \times 1, n \times 1, 1 \times n$ i $m \times n$.

Z własności ZPL wiadomo, że jeśli jest ono *ograniczone* i *niesprzeczne*, to istnieje co najmniej jedna decyzja $\mathbf{x}_{op}$ (zwana *optymalną*), że

$$\mathbf{cx} \leq \mathbf{cx}_{op} \text{ dla każdej decyzji } \mathbf{x} \in D.$$

Zadaniem *algorytmu simplex* jest skonstruowanie ciągu decyzji $\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, takich że

$$\mathbf{cx}_o < \mathbf{cx}_1 < \ldots < \mathbf{cx}_k = \mathbf{cx}_{op}.$$

Każdy etap powyższej procedury, który dla $j \geq 1$ z decyzji $\mathbf{x}_j$ robi decyzję $\mathbf{x}_{j+1}$ nazwiemy *iteracją*. W metodzie simplex każda iteracja jest efektem zadziałania tej samej procedury. Dlatego metoda simplex jest niczym innym jak wielokrotnym powtórzeniem takich iteracji.

Na przykładach dwóch ZPL pokażemy w jaki sposób można zrealizować ten zamysł, nie wykorzystując do tego celu tablic simplex. Zaczniemy od przypadku pojedynczej iteracji.

2 Przypadek pojedynczej iteracji

Niech dane będzie $ZPL_\star$ z funkcją celu $FC_\star$ w postaci *analitycznej*

$$\mathbf{R}^3 \supset D_\star \ni (x_1, x_2, x_3) \to FC_\star(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max,$$

gdzie

$$x_1, x_2, x_3 \in D_\star \Leftrightarrow x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

oraz

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 8$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4.$$

Etap 1–konstrukcja nowego ZPL

Skonstruujemy najpierw nowe $ZPL_{\star\star}$ typu $m \times (n+m)$ odpowiadające $ZPL_\star$ w ten sposób aby warunki ograniczające można było zapisać za pomocą układu równań liniowych. W tym celu zdefiniujemy $m = 3$ kolejne argumenty x_4, x_5, x_6 nowej funkcji celu $FC_{\star\star}$, gdzie

$$x_4 = 5 - (x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$
$$x_5 = 8 - (2x_1 + 3x_2 + 5x_3)$$
$$x_6 = 4 - (3x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Pozwala nam to zdefiniować ZPL z funkcją celu $FC_{\star\star}\colon D_{\star\star} \to \mathbf{R}$, gdzie

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in D_{\star\star} \subset \mathbf{R}^6 \Leftrightarrow$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, 6,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_5 = 8$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 4$$

oraz

$$FC_{\star\star}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max.$$

Zauważmy, że wtedy

$$FC_{\star\star}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = FC_\star(x_1, x_2, x_3) \text{ dla każdej decyzji } (x_1, x_2, x_3) \in D_\star.$$

W tzw. *zerowym kroku iteracji* bierzemy $\mathbf{x}_o = (0, 0, 0, 5, 8, 4)$. Zauważmy, że $\mathbf{x}_o \in D_{\star\star}$, czyli jest decyzją dla $ZPL_{\star\star}$ oraz $FC_{\star\star}(\mathbf{x}_o) = 0$.

Etap2–pierwszy krok iteracji

Pokażemy w jaki sposób można skonstruować decyzję $\mathbf{x}_1$ zmieniając w odpowiedni sposób postać decyzji $\mathbf{x}_o$, tak aby $FC_{\star\star}(\mathbf{x}_o) < FC_{\star\star}(\mathbf{x}_1)$. W tym celu argumenty funkcji celu $FC_{\star\star}$ podzielimy na dwie kategorie:

- **zmienne bazowe** x_4, x_5, x_6,
- **zmienne niebazowe** x_1, x_2, x_3.

Modyfikacja decyzji $\mathbf{x}_o$ polega na tym, że jedna z aktualnych zmiennych niebazowych (nazwiemy ją **zmienną wchodzącą**) zajmie miejsce zmiennej bazowej (nazwiemy ją **zmienną wychodzącą**). Dla ustalenia postaci zmiennej wchodzącej skorzystamy z bardzo prostej własności:

> jeśli w wyrażeniu liniowym $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ zmianie ma ulec tylko wartość pojedynczego argumentu, to największy przyrost wartości takiego wyrażenia zaobserwujemy, jeśli tym argumentem będzie x_j, przy którym znajduje się największy dodatni współczynnik c_j.

W naszym przypadku, ponieważ $c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 3$, będzie nim argument x_3. Określiliśmy zatem postać zmiennej wchodzącej.

Uwaga 2.1 *Gdyby wszystkie wspłczynniki* $c_j < 0$, *to* $\mathbf{x}_{op} = (0, 0, 0)$, *o ile* $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Abu ustalić nazwę zmiennej wychodzącej, a w efekcie aktualną postać zmiennych bazowych, musimy wyznaczyć wartość zmiennej wchodzącej x_3. W tym celu skorzystamy z:

- uwagi, że ponieważ wśród zmiennych niebazowych, zmiennymi które nie wchodzą są x_1, x_2, to zachowują one swoje dotychczasowe wartości, a więc
$$x_1 = x_2 = 0;$$
- warunków brzegowych dla aktualnych zmiennych bazowych, czyli po uwzględnieniu powyższego
$$x_4 \geq 0 \Leftrightarrow 5 - 3x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq \frac{5}{3},$$
$$x_5 \geq 0 \Leftrightarrow 8 - 5x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq \frac{8}{5},$$
$$x_6 \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 3x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq \frac{4}{3}.$$

Ponieważ powyższe trzy nierówności muszą zachodzić jednocześnie, oznacza to, że największą dopuszczalną wartością argumentu x_3 może być liczba najmniejsza spośród liczb po prawej stronie każdej z nierówności, czyli $\frac{4}{3}$. Przyjmujemy, że $x_3 = \frac{4}{3}$. Wtedy (pamiętamy, że $x_1 = x_2 = 0$) z definicji zmiennych bazowych dostaniemy:

$$x_4 = 1, x_5 = \frac{4}{3}, x_6 = 0,$$

co pozwala nam zdefiniować postać decyzji $\mathbf{x}_1 = (0, 0, \frac{4}{3}, 1, \frac{4}{3}, 0) \in D_{\star\star}$.

Zauważmy, że

$$0 = FC_{\star\star}(\mathbf{x}_o) < FC_{\star\star}(\mathbf{x}_1) = 4.$$

Wreszcie znamy nazwę zmiennej wychodzącej: jest to ta, która przyjmuje najmniejszą wartość spośród aktualnych zmiennych bazowych, czyli x_6.

W takim razie **możemy zrealizować** pierwszą iterację:

- ustalamy aktualną postać zmiennych bazowych:

stare zm. bazowe	zm. wchodząca	zm. wychodząca	aktualne zm. bazowe
x_4, x_5, x_6	x_3	x_6	x_3, x_4, x_5

- ustalamy aktualną postać ZPL: w tym celu bierzemy warunek ograniczający, w którym występuje zmienna wychodząca, czyli x_6 i wyznaczamy z niego zmienną x_3–nową zmienną wchodzącą

$$x_6 = 4 - 3x_1 - x_2 - 3x_3 \Leftrightarrow x_3 = \frac{4}{3} - x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6.$$

- Korzystając z powyższego związku, wyliczamy wartości kolejnych zmiennych bazowych x_4, x_5, czyli

$$x_4 = 5 - x_1 - 2x_2 - 3\Big(\frac{4}{3} - x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6\Big) = 1 + 2x_1 - x_2 + x_6,$$

$$x_5 = 8 - 2x_1 - 3x_2 - 5\Big(\frac{4}{3} - x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6\Big) = \frac{4}{3} + 3x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_6.$$

- Ustalamy aktualną postać funkcji celu

$$FC_{\star\star}(x_1, x_2, x_6, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + x_2 + 3\Big(\frac{4}{3} - x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6\Big) = 4 - x_1 - x_6.$$

Zakończyliśmy procedurę pierwszej iteracji. Podsumujmy efekty naszej pracy.

1. Ponieważ $FC_\star = FC_{\star\star}$, więc z powyższego oryginalna funkcja celu $FC_\star$ ma postać
$$FC_\star(x_1, x_2, x_6) = 4 - x_1 - x_6.$$

2. $$(x_1, x_2, x_6) \in D_\star \Leftrightarrow x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_6 \geq 0$$

   oraz
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 8 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 4. \end{aligned}$$

   gdzie jak pamiętamy
$$x_3 = \frac{4}{3} - x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6.$$

Z aktualnej postaci funkcji celu wnosimy, że brak jest kolejnej zmiennej wchodzącej (wszystkie współczynniki są ujemne). Oznacza to, że **druga iteracja jest zbędna**. Rzeczywiście, w naszym przypadku

$$FC_\star(x_1, x_2, x_6) = 4 - x_1 - x_6 \leq 4 \text{ i } FC_{\star\star}(\mathbf{x_1}) = FC_\star(0, 0, \frac{4}{3}) = 4,$$

co dowodzi, że $\mathbf{x}_{op} = (0, 0, \frac{4}{3})$.

3 Przypadek dwóch iteracji

Niech dane będzie $ZPL_\star$ z funkcją celu $FC_\star$ w postaci *analitycznej*

$$\mathbf{R}^3 \supset D_\star \ni (x_1, x_2, x_3) \to FC_\star(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$

gdzie

$$x_1, x_2, x_3 \in D_\star \Leftrightarrow x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

oraz

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 2.$$

Etap 1–konstrukcja nowego ZPL

1. **definicja zmiennych bazowych:**

$$x_4 = 4 - x_1 - 2x_2 - x_3$$
$$x_5 = 3 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_6 = 2 - x_1 + x_2 - 4x_3,$$

2. **konstrukcja** $ZPL_{\star\star}$

$$FC_{\star\star}\colon\ D_{\star\star} \to \mathbf{R},\ FC_{\star\star}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = FC_\star(x_1, x_2, x_3),$$

   gdzie

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in D_{\star\star} \Leftrightarrow x_j \geq 0,$$

   oraz warunki ograniczające opisane są warunkami definiującymi zmienne bazowe w punkcie 1,

3. **konstrukcja decyzji początkowej**

$$\mathbf{x}_o = (0, 0, 0, 4, 3, 2),\ FC_{\star\star}(\mathbf{x}_o) = 0.$$

Etap 2–I krok iteracji

- **aktualne zmienne bazowe:** x_4, x_5, x_6,
- **aktualne zmienne niebazowe:** x_1, x_2, x_3,
- **zmienna wchodząca:** z definicji $FC_{\star\star}$ jest nią x_1,

- **ustalenie wartości tej zmiennej:** dla $x_2 = x_3 = 0$, z warunków ograniczających dla $ZPL_{\star\star}$

$$x_4 \geq 0 \Leftrightarrow 4 - x_1 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq 4$$
$$x_5 \geq 0 \Leftrightarrow 3 - 2x_1 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq \frac{3}{2}$$
$$x_6 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x_1 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq 2,$$

  skąd $x_1 = \frac{3}{2}$,

- **ustalenie zmiennej wychodzącej:** dla $x_2 = x_3 = 0, x_1 = \frac{3}{2}$, zmienne bazowe przyjmują wartości:

$$x_4 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$
$$x_5 = 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 0$$
$$x_6 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

  i dlatego jest nią x_5,

- **postać decyzji $\mathbf{x}_1$:**

$$\mathbf{x}_1 = (\frac{3}{2}, 0, 0, \frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}),\ FC_{\star\star}(\mathbf{x}_1) = \frac{9}{2},$$

- **nowe zmienne bazowe:** x_1, x_4, x_6,

- **aktualizacja ZPL:** z warunku na aktualną zmienną wychodzącą wyznaczamy aktualną zmienną wchodzącą, czyli

$$x_5 = 3 - 2x_1 - x_2 - x_3 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5$$

  i po podstawieniu do x_4, x_6 dostaniemy

$$x_4 = 4 - \Big(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5\Big) - 2x_2 - x_3 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$$
$$x_6 = 2 - \Big(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5\Big) + x_2 - 4x_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5,$$

  gdzie, ponieważ zmiennymi niebazowymi teraz są x_2, x_3, x_5, aktualna postać funkcji celu jest następująca

$$FC_{\star\star}(x_2, x_3, x_5, x_1, x_4, x_6) = 3\Big(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5\Big) + x_2 + 2x_3$$

  i dlatego

$$FC_{\star\star}(x_2, x_3, x_5, x_1, x_4, x_6) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_5 \rightarrow \max.$$

Etap 3–II krok iteracji

- **aktualne zmienne bazowe:** x_1, x_4, x_6,
- **aktualne zmienne niebazowe:** x_2, x_3, x_5,
- **zmienna wchodząca:** z ostatniej definicji $FC_{\star\star}$ jest nią x_3,
- **ustalenie wartości tej zmiennej:** dla $x_2 = x_5 = 0$ (patrz postać $\mathbf{x}_1$), z warunków ograniczających dla $ZPL_{\star\star}$ (patrz aktualizacja ZPL w kroku I)

$$x_1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq 3$$

$$x_4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq 5$$

$$x_6 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{7}{2}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq \frac{1}{7},$$

  skąd $x_3 = \frac{1}{7}$,

- **ustalenie zmiennej wychodzącej:** dla $x_2 = x_5 = 0, x_3 = \frac{1}{7}$, zmienne bazowe przyjmują wartości:

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{14} = \frac{10}{7}$$

$$x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{14} = \frac{17}{7}$$

$$x_6 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

  i dlatego jest nią x_6,

- **postać decyzji $\mathbf{x}_2$:**

$$\mathbf{x}_2 = \Big(\frac{10}{7}, 0, \frac{1}{7}, \frac{17}{7}, 0, 0\Big), \ FC_{\star\star}(\mathbf{x}_2) = \frac{32}{7},$$

- **nowe zmienne bazowe:** x_1, x_3, x_4,
- **aktualizacja ZPL:** z warunku na aktualną zmienną wychodzącą (patrz aktualizacja ZPL w kroku I) wyznaczamy aktualną zmienną wchodzącą, czyli

$$x_6 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{7} + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6$$

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{7} + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6\Big) - \frac{1}{2}x_5 = \frac{10}{7} - \frac{5}{7}x_2 - \frac{4}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_6$$

$$x_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{7} + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6\Big) + \frac{1}{2}x_5 = \frac{17}{7} - \frac{12}{7}x_2 + \frac{13}{14}x_5 + \frac{1}{7}x_6,$$

gdzie, ponieważ zmiennymi niebazowymi teraz są x_2, x_5, x_6, aktualna postać funkcji celu jest następująca

$$FC_{\star\star}(x_2, x_5, x_6, x_1, x_3, x_4) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{7} + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6\Big) - \frac{3}{2}x_5,$$

i dlatego

$$FC_{\star\star}(x_2, x_5, x_6, x_1, x_3, x_4) = \frac{32}{7} - \frac{2}{7}x_2 - \frac{10}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_6 \to \max.$$

Na podstawie aktualnej postaci funkcji celu widzimy, że **nie ma kolejnej zmiennej wchodzącej.** Jednocześnie (pamiętamy, że $x_2 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$)

$$FC_{\star\star}(\mathbf{x}) \leq \frac{32}{7} \text{ dla każdej decyzji } \mathbf{x}.$$

Ponieważ $FC_{\star}(\frac{10}{7}, 0, \frac{1}{7}) = FC_{\star\star}(\mathbf{x}_2) = \frac{32}{7}$, więc $\mathbf{x}_{op} = (\frac{10}{7}, 0, \frac{1}{7})$, co kończy procedurę.

Uwaga 3.1 *Zaprezentowany na dwóch przykładach algorytm ma jedną wadę– może się "zapętlić", tzn. może zdarzyć się sytuacja, że po kilku krokach wrócimy do tych samych zmiennych bazowych. Oczywiście istnieje wyjście z takiej sytuacji, o czym z oczywistych powodów nie napiszemy. Nie mniej jednak uważamy, że warto przedstawionej wyżej metodzie poświęcić uwagę–jest ona bardziej intuicyjna i prostsza od przeprowadzenia aniżeli metoda tablic simplex.*