Bardzo lekkie wprowadzenie do metod zliczania

Ryszard Rębowski

12 listopada 2016

1 Wstęp

Zaczniemy od przedstawienia podstawowej metodologii wspomagającej *proces zliczania* (MPZ). Ponieważ celem tego procesu jest stwierdzenie z ilu elementów składa się dany zbiór, u podstaw MPZ musi znaleźć się wymóg potrzeby określenia tego zbioru. Przypuśćmy, że potrafimy to zrobić, i niech nazywa się on A. Oczywiście możemy założyć, że $A \neq \emptyset$. Aby dokonać procedury zliczenia musimy zacząć od ustalenia *zbioru wartości miary* tej procedury, według poniżej zasady

$$X \supset A \ \rightarrow \ |A| \in \mathcal{K}, \tag{1}$$

gdzie X oznacza ustalony zbiór, z elementów którego składają się zbiory typu A, symbol $|A|$ oznacza wartość procedury MPZ odnoszącą się do zbioru A, $\mathcal{K}$ oznacza zbiór wszystkich możliwych wartości uzyskanych w wyniku MPZ.
Dalej $\mathcal{K}$ będziemy nazywali *zbiorem liczb kardynalnych*, wynik MPZ – $|A|$, *mocą zbioru* A. W takim razie MPZ jest sposobem mierzenia zbioru określającym jego moc. Przejdźmy teraz do szczegółów. Zaczniemy od przedstawienia konstrukcji *liczby kardynalnej* szczególnego typu.

2 Pojęcie skończonej liczby kardynalnej

Przypuśćmy, że ze zbioru X wybraliśmy dwa niepuste zbiory C i D. Z definicji przyjmiemy, że są one *równoliczne*, co zapiszemy $C \equiv D$, jeśli istnieje odwzorowanie $f\colon\ C \rightarrow\ D$, które jest *różnowartościowe* oraz jego zbiorem wartości jest zbiór D.[1]

Fakt 1 *(własności związku równoliczności)*
Dla dowolnych trzech podzbiorów $C,\ D,\ E \subset X$ *mamy:*

[1]Dalej o takim odwzorowaniu będziemy mówili, że jest *bijekcją*.

1. $$C \equiv C,$$

   co oznacza, że każdy zbiór jest równoliczny ze sobą (efekt tzw. zwrotności);

2. $$C \equiv D \Rightarrow D \equiv C,$$

   co oznacza, że jeśli zbiór C jest równoliczny ze zbiorem D, to D musi być równoliczny z C (efekt tzw. symetrii);

3. $$C \equiv D \text{ i } D \equiv E \Rightarrow C \equiv E,$$

   co oznacza, że jeśli zbiór C jest równoliczny ze zbiorem D i jednocześnie D jest równoliczny z E, to na pewno C i E są równoliczne (efekt tzw. przechodniości).

Dowód. Zwrotność jest konsekwencją stwierdzenia, że *odwzorowanie identycznościowe* jest bijekcją. Dla dowodu właściwości symetrii wystarczy zauważyć, że każda bijekcja jest *odwracalna* oraz powstałe odwzorowanie jest również bijekcją. Przechodniość z kolei wynika z uwagi, że złożeniem bijekcji jest bijekcja.[2]

□

Ustalmy teraz $C \subset X$ oraz weźmy zbiór złożony ze wszystkich podzbiorów $D \subset X$, które są równoliczne z C. Oznaczając ten zbiór przez $[C]$ możemy napisać

Definicja 1 *(klasy abstrakcji)*
Przez klasę abstrakcji zbioru C względem zależności $\equiv$ rozumiemy zbiór $[C]$, gdzie

$$[C] = \{D \subset X \ : \ D \equiv C\}.$$

Z Faktu 1 widzimy, że zachodzi następująca własność.[3]

Wniosek 1

1. *$C \in [C]$, co oznacza, że klasa abstrakcji dowolnego zbioru jest zbiorem niepustym.*

2. *Dla dowolnych dwóch podzbiorów $C, \ D \subset X$,*

   $$\textit{albo } [C] = [D], \ \textit{albo } [C] \cap [D] = \emptyset.$$

   Zatem, jeśli dwie klasy różnią się chociażby jednym elelmentem, to muszą być rozłączne.

[2]Szczegóły pozostawiemy Czytelnikowi.
[3]Czytelnik powinien umieć to uzasadnić.

Gotowi jesteśmy do podania konstrukcji zbioru liczb kardynalnych $\mathcal{K}$.

Definicja 2 *(skończonej liczby kardynalnej)*[4]

1. *Niech $C \subset X$ będzie taki, że $C \in [\{1\}]$, gdzie 1 oznacza liczbę naturalną jeden. Wtedy symbolem* $\mathbf{1}$ *oznaczymy moc zbioru C, czyli $|C| = \mathbf{1} \in \mathcal{K}$. Jest to pierwsza nietrywialna liczba kardynalna. Dalej będziemy ją nazywali krótko „jeden".*[5]
   I ogólnie,

2. *Dla $C \in [\{1, 2, \ldots, n\}]$, gdzie n oznacza liczbę naturalną większą lub równą jeden, symbolem* $\mathbf{n}$ *oznaczymy moc zbioru C, czyli $|C| = \mathbf{n} \in \mathcal{K}$.*

Definicja skończonej liczby kardynalnej pozwala zdefiniować nam *zbiór wszystkich skończonych liczb kardynalnych* $\mathcal{K}$, czyli

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}, \ldots\}. \tag{2}$$

Definicja 3
Powiemy, że zbiór $C \subset X$ jest skończony, jeśli $|C| \in \mathcal{K}$.

Z definicji równoliczności, własności związku $\equiv$ oraz definicji skończonej liczby kardynalnej wynikają następujące praktyczne stwierdzenia.

Wniosek 2
Niech C będzie dowolnym skończonym podzbiorem X. Wtedy albo C jest zbiorem pustym, albo istnieje liczba naturalna n, że

$$C \equiv \{1, 2, \ldots, n\},$$

co oznacza, że zbiór C jest wartością ciągu

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n), \ \ gdzie\ f(k) = c_k\ \ dla\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

dla pewnej bijekcji f.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $|C| = \mathbf{n}$ dla pewnej skończonej liczby kardynalnej i skorzystać z wyników (jakich?) tego rozdziału.

$\square$

[4] Istnieją tzw. nieskończone liczy kardynalne. W tym sensie w matematyce mówi się o różnych rodzajach nieskończoności. Najmniejsza z nich reprezentowana jest przez zbiór liczb naturalnych. Wtedy piszemy $|\mathbf{N}| = \aleph_o$. Ale w przypadku zbioru liczb rzeczywistych mamy już $\mathbf{R} \not\equiv \mathbf{N}$. Dlatego $|\mathbf{R}| \neq \aleph_o$. Piszemy też wtedy $|\mathbf{R}| = \mathfrak{c}$. ponieważ $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$ oraz zbiory te nie są równoliczne, piszemy też $\aleph_o < \mathfrak{c}$. Mamy w ten sposób już dwie różne niesko nczoności. A jest ich o wiele więcej!

[5] Dla zbioru pustego mamy $[\emptyset] = \{\emptyset\}$ i z definicji przyjmujemy, że $|\emptyset| = \mathbf{0}$.

Wniosek 2 ilustruje istotę MPZ, czyli zjawisko *ustawienia* wszystkich elementów zbioru w *skończony ciąg*. Mając takie ustawienie, możemy niejako na zasadzie odczytywania „listy obecności" dokonać *listingu* tego zbioru. Mówimy wtedy, że jest on *przeliczalny*. Zbiór taki, powiedzmy $C \subset X$ *reprezentowany* wtedy jest przez podzbiór zbioru liczb naturalnych $\{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie $|C| = \mathbf{n}$. Jednocześnie należy pamiętać, że skończona liczba kardynalna, jako wynik pomiaru mocy zbioru to **nie to samo**, co odpowiadająca jej liczba naturalna, co ilustruje poniższy przykład.

Przykład 1
Weźmy następujące zbiory:

$$\{1, 2, 3\},\ \{a, b, c\},\ \{\text{„czerwony"}, \text{„zielony"}, \text{„niebieski"}\}, \{F, G, H\},$$

gdzie a, b, c reprezentują nazwy abstrakcyjnych pojęć, F, G, H są podzbiorami jakiegoś zbioru. Jasne jest, że pochodzenie tych zbiorów jest różne. Ponieważ są równoliczne, pochodzą z tej samej klasy abstrakcji, która reprezentowana jest przez pierwszy ze zbiorów. Mamy zatem pewną niejednoznaczność – różnym zbiorom odpowiada ich wspólny reprezentant. Ta „wspólność" stanowi istotę definicji mocy zbioru, która określona już jest jednoznacznie, co zapisujemy jako

$$|\{1, 2, 3\}| = |\{a, b, c\}| = |\{\text{„czerwony"}, \text{„zielony"}, \text{„niebieski"}\}| = |\{F, G, H\}| = \mathbf{1}.$$

Niemniej jednak dalej, o ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy pisali $|C| = n$, w miejsce dotychczasowego sposobu $|C| = \mathbf{n}$.

Możemy teraz sformułować treść **Metodologii Procesu Zliczania** dla zbiorów skończonych. Procedura MPZ polega na:

1. Identyfikacji obiektu, który jej podlega, czego efektem jest pewien zbiór C.
2. Wykazaniu, że $C \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$ dla pewnej liczby naturalnej.[6]

[6] Odbywa się to przy zastosowaniu tzw. *reguł zliczania,* którymi zajmiemy się dalej.

3 Wybrane przykłady prowadzące do MPZ

Podamy teraz szereg przykładów i sposoby ich rozwiązania. Uogólnienia tych sposobów *de facto* doprowadzą nas do metod używanych w MPZ.

Przykład 2
Niech dane będą trzy elementy: a, b, c pewnego zbioru X. Należy wyznaczyć liczbę wszystkich możliwych uporządkowań tych elementów.

Rozwiązanie. Zgodnie z MPZ skonstruujemy mnogość, powiedzmy $\mathbf{P}$, której elementami będą wszystkie ciągi długości trzy o różnych wyrazach należących do zbioru $\{a, b, c\}$. Ponieważ

$$\mathbf{P} = \{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)\},$$

gdzie każdy element zbioru $\mathbf{P}$ reprezentuje inne uporządkowanie $\{a, b, c\}$, $|\mathbf{P}| = 6$.

Przykład 3
Na ile sposobów ze zbioru $\{a, b, c, d\} \subset X$ można wybrać trzy-elementowe podzbiory?

Rozwiązanie. Tym razem bierzemy zbiór, którego elementami są wspomniane w zagadnieniu zbiory. Dalej taki zbiór będziemy nazywali *rodziną zbiorów* lub krótko *rodziną*. Oznaczając tę rodzinę przez $\mathcal{C}$ otrzymamy

$$\mathcal{C} = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\}.$$

Dlatego $|\mathcal{C}| = 4$.

Przykład 4
Na ile sposobów ze zbioru $\{a, b, c\} \subset X$ można wybrać par uporządkowanych?

Rozwiązanie. Bierzemy zbiór $\mathcal{V}$, którego elementami są wszystkie 2–wyrazowe ciągi o wartościach w zbiorze $\{a, b, c\}$, czyli

$$\mathcal{V} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, c), (c, a), (c, b)\}.$$

Dlatego $|\mathcal{V}| = 9 = 3^2$.

Przykład 5
Ile powstanie takich par uporządkowanych powstałych z różnych elementów zbioru $\{a, b, c\}$?

Rozwiązanie. Jeśli $\mathcal{W}$ oznacza zbiór wszystkich takich par, to

$$\mathcal{W} = \mathcal{V} \setminus \{(a, a), (b, b), (c, c)\},$$

dlatego $|\mathcal{W}| = 6$.

Przykład 6
Niech dla podzbioru skończonego $A \subset X$, $A = A_1 \cup A_2$ *dla pewnych zbiorów* A_1, A_2. *Obliczyć moc zbioru* A.

Rozwiązanie. Zaczniemy od analizy sytuacji kiedy zbiory A_1, A_2 są rozłączne. Ustawmy wszystkie elementy obu zbiorów w dwa ciągi, powiedzmy

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n), \text{ gdzie } a_j \in A_1,$$

$$(b_1, b_2, \ldots, b_m), \text{ gdzie } b_j \in A_2.$$

Scalamy teraz tak skonstruowane ciągi do ciągu postaci

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Z założenia powstały ciąg składa się z różnych wyrazów oraz ze wszystkich elementów zbioru A. Dlatego istnieje bijekcja pomiędzy zbiorami $\{1, 2, \ldots, m+n\}$ oraz A. Stąd

$$|A| = n + m = |A_1| + |A_2|.$$

Rozumowania powyższego nie możemy powtórzyć w przypadku kiedy zachodzi warunek $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. W takiej sytuacji zauważmy, że

$$A = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus A_1).$$

Wtedy A jest sumą trzech parami rozłącznych zbiorów, powiedzmy C_1, C_2, C_3, gdzie

$$C_1 = A_1 \setminus A_2, \; C_2 = A_1 \cap A_2, \; C_3 = A_2 \setminus A_1.$$

Powtarzając rozumowanie przedstawione wyżej, dla trzech parami rozłącznych zbiorów możemy napisać

$$|A| = |C_1| + |C_2| + |C_3|.$$

Obliczymy pierwszy i ostatni składnik powyższej sumy. Zauważmy najpierw, że z definicji różnicy mnogościowej możemy napisać

$$C_1 = A_1 \setminus (A_1 \cap A_2).$$

Podobnie

$$C_3 = A_2 \setminus (A_1 \cap A_2).$$

Ale wtedy

$$A_1 = C_1 \cup (A_1 \cap A_2), \; A_2 = C_2 \cup (A_1 \cap A_2)$$

oraz ponieważ występujące po prawych stronach ostatnich równości zbiory są rozłączne, z uzyskanego na wstępie rozwiązania wyniku dostaniemy

$$|A_1| = |C_1| + |A_1 \cap A_2|, \; |A_2| = |C_2| + |A_1 \cap A_2|,$$

co oznacza, że

$$|C_1| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|, \ |C_2| = |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Dlatego dostaniemy

$$|A| = |A_1| - |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Prowadzi to do następującej konkluzji – dla dowolnych dwóch skończonych podzbiorów A_1, A_2

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Przykład 7

Uogólnić ostatni wzór na przypadek trzech zbiorów.

Rozwiązanie. Zastosujemy dwukrotnie otrzymany wyżej wynik. W tym celu zauważmy, że

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3.$$

Dlatego

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|.$$

Ale z zasady rozdzielności iloczynu mnogościowego względem sumy mamy

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3),$$

skąd

$$|(A_1 \cup A_2) \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)|,$$

czyli

$$|(A_1 \cup A_2) \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Dlatego

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$
$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Przykład 8

Wyznaczyć liczbę wszystkich podzbiorów zbioru $\{a, b, c\} \subset X$.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $\mathcal{P}$ rodzinę złożoną ze wszystkich podzbiorów zbioru $\{a, b, c\}$. Zauważmy, że możemy napisać

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_o \cup \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3,$$

gdzie z definicji $\mathcal{P}_k$ oznacza rodzinę wszystkich k–elementowych podzbiorów zbioru $\{a, b, c\}$. Z definicji wynika wprost, że rodziny $\mathcal{P}_k$ są parami rozłączne. Korzystając z wyniku Przykładu 7 mamy

$$|\mathcal{P}| = |\mathcal{P}_o| + |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| + |\mathcal{P}_3|.$$

Ale $|\mathcal{P}_o| = |\{\emptyset\}| = 1$, $|\mathcal{P}_3| = |\{a, b, c\}| = 1$, oraz z Przykładu 3, $|\mathcal{P}_1| = 3$, $|\mathcal{P}_2| = 3$. Dlatego

$$|\mathcal{P}| = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3.$$

Przykład 9
Wyznaczyć moc iloczynu kartezjańskiego dwóch skończonych niepustych zbiorów.

Rozwiązanie. Z założenia $A = A_1 \times A_2$ dla pewnych skończonych niepustych podzbiorów zbioru X. Weźmy wszystkie elementy zbioru A, czyli pary uporządkowane (a_i, b_j), gdzie $a_i \in A_1$ dla $i = 1, 2, \ldots, |A_1| = n$ oraz $b_j \in A_2$ dla $j = 1, 2, \ldots, |A_2| = m$. Uporządkujmy te elementy w następujący sposób:

$$\begin{array}{cccc} (a_1, b_1), & (a_1, b_2), & \ldots & (a_1, b_m) \\ (a_2, b_1), & (a_2, b_2), & \ldots & (a_2, b_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_n, b_1), & (a_n, b_2), & \ldots & (a_n, b_m). \end{array}$$

Dlatego

$$|A_1 \times A_2| = nm = |A_1||A_2|.$$

Przykład 10
Dla zbioru $C \subset \{a, b, c\} \subset X$ definiujemy funkcję

$$\mathbf{1}_C(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \in \{a, b, c\} \setminus C. \end{cases}$$

Tak zdefiniowaną funkcję nazwiemy funkcją charakterystyczną zbioru C. Weźmy zbiór $\mathcal{F}$ – wszystkich funkcji charakterystycznych. Należy zliczyć ten zbiór.

Rozwiązanie. Na wstępie zauważmy, że każdej funkcji charakterystycznej $\mathbf{1}_C$ odpowiada dokładnie jedna funkcja $f\colon \{a, b, c\} \to \{0, 1\}$ i na odwrót. Istotnie, dla danego zbioru C, $f = \mathbf{1}_C$ ma powyższe własności. Jeśli teraz funkcja f określona na $\{a, b, c\}$ przyjmuje tylko dwie wartości: 0 i 1, to dla zbioru C, gdzie $C = \{x \in \{a, b, c\}\colon\ f(x) = 1\}$ mamy $f = \mathbf{1}_C$. Oznacza to, że zbiory $\mathcal{F}$ oraz rodzina $\mathcal{P}$ wszystkich podzbiorów zbioru $\{a, b, c\}$ są równoliczne. Z Przykładu 8 wynika, że $|\mathcal{F}| = 2^3$.

4 Przegląd wybranych metod zliczania

Jak sygnalizowaliśmy wcześniej, pokażemy teraz najważniejsze uogólnienia przykładów zaprezentowanych powyżej. Większość z nich można zaklasyfikować do grupy tzw. *metod zliczania*. Pokażemy też inne zastosowania tych metod, o których do tej pory nie wspominaliśmy.

4.1 Zasada addytywności oraz włączania-wyłączania

Twierdzenie 1 *(Zasada Addytywności)*
Niech X oznacza niepusty zbiór, $\mathcal{A}$ rodzinę złożoną z n skończonych podzbiorów X, takich, że są parami rozłaczne, czyli

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ i \neq j,\ A_i \in \mathcal{A}.$$

Wtedy

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|. \tag{3}$$

Dowód. Przebiega podobnie jak dowód własności podanej w Przykładzie 6 (szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi).

□

Uogólnieniem Przykładu 6 i 7 oraz ZA jest następująca *zasada włączania-wyłączania.*

Twierdzenie 2 *(Zasada Włączania-Wyłączania)*
Przypuśćmy, że $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, gdzie $A_j \subset X$ skończone podzbiory. Dla $k = 1, 2, \ldots, n$ niech $\mathcal{A}_k$ oznacza rodzinę, której elementami są wszystkie k-elementowe podzbiory rodziny $\mathcal{A}$. Zatem

$$\mathcal{A}_1 = \{\{A_1\}, \{A_2\}, \ldots, \{A_n\}\},\ \{A_1, A_2\} \in \mathcal{A}_2,\ \{A_1, A_2, A_3\} \in \mathcal{A}_3,\ \textit{itd.}$$

Aby wyznaczyć moc sumy wszystkich elementów rodziny $\mathcal{A}$ należy:

- *dodać do siebie moce wszystkich iloczynów elementów rodzin $\mathcal{A}_k$ dla nieparzystych wartości k (efekt włączania),*
- *odjąć od powyższej sumy moce wszystkich iloczynów elementów rodzin $\mathcal{A}_k$ dla parzystych wartości k (efekt wyłączania).*

Na przykład, dla $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ mamy:

$$\mathcal{A}_1 = \{\{A\}, \{B\}, \{C\}\},\ \mathcal{A}_2 = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\},\ \mathcal{A}_3 = \{\{A, B, C\}\}.$$

Wtedy dostaniemy (patrz wynik podany w Przykładzie 7)

$$|A \cup B \cup C| = \underbrace{|A| + |B| + |C|}_{\text{efekt włączania}} - \underbrace{(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)}_{\text{efekt wyłączania}} + \underbrace{|A \cap B \cap C|}_{\text{efekt włączania}}.$$

Dowód tego twierdzenia przebiega podobnie jak dowód wzoru podanego w Przykładzie 7. Ze względu na jego uciążliwy charakter pominiemy go. W zamian proponujemy Czytelnikowi napisanie treści tej zasady dla przypadku $n = 5$.

4.2 Zasada wielokrotnego wyboru

Przypuśćmy, że mamy abstrakcyjny *obiekt* $\mathcal{O}$, którego struktura zdeterminowana jest przez n uporządkowanych *stanów* s_j, gdzie każdy z nich może przyjmować określoną ilość różnych wartości $k_j = |s_j|$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$. Wartości te dla różnych stanów mogą być przyjmowane w sposób od siebie niezależny. Dla zadanych wartości stanów obiekt reprezentowany jest przez ciąg $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Przyjmiemy, że różnym takim ciągom odpowiadają różne własności obiektu.

Wtedy, zgodnie z *zasadą wielokrotnego wyboru* liczba wszystkich możliwych wartości tak zdefiniowanego obiektu dana jest wzorem[7]

$$|\mathcal{O}| = k_1 k_2 \ldots k_n. \tag{4}$$

Sformułowana powyżej zasada ma wiele zastosowań. Pokażemy kilka z nich. Oznaczmy przez $\mathcal{P}_n$ zbiór wszystkich ciągów długości $n \geqslant 1$, o różnych wyrazach należących do danego zbioru $A \subset X$, gdzie $|A| = n$. Dalej każdy element $p \in \mathcal{P}_n$ będziemy nazywali n-elementową *permutacją* zbioru A.

Twierdzenie 3 *(o mocy zbioru wszystkich permutacji)*[8]

$$|\mathcal{P}_n| = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \tag{5}$$

Co więcej wartość ta nie zależy od wyboru zbioru A, o ile jest on mocy n.

Dowód. Zastosujemy zasadę wielokrotnego wyboru. W tym celu zdefiniujemy obiekt $\mathcal{O}$ – będzie nim ciąg długości $n = |A|$, którego kolejne wyrazy roboczo nazwiemy stanami tego obiektu. Niech $(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n)$ będzie tym obiektem. Jego konfiguracja polegać będzie na tym, że będziemy kolejno obsadzali stany dostępnymi elementami zbioru A. Oznacza to, że:

- stan s_1 obsadzimy na $k_1 = n$ sposobów,
- po obsadzeniu stanu s_1 wybranym elementem, powiedzmy $a_1 \in A$, do obsadzenia stanu s_2 będziemy mieli do dyspozycji elementy ze zbioru $A \setminus \{a_1\}$, czyli $k_2 = n - 1$,

[7] Zasada ta jest na tyle intuicyjna, że zrezygnowaliśmy z jej formalnego dowodu, który jest uogólnieniem rozumowania podanego w Przykładzie 9.

[8] Jest to uogólnienie wyniku podanego w Przykładzie 2.

- w przypadku stanu s_3, po obsadzeniu stanu s_2 elementem $a_2 \in A$, pozostanie nam $A \setminus \{a_1, a_2\}$, czyli $k_3 = n - 2$,
- i ogólnie, dla stanu s_i pozostanie nam $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\}$, czyli $k_i = n - (i - 1)$. W szczególności dla ostaniego stanu s_n, $k_n = 1$.

Dlatego liczba wszystkich różnych konfiguracji tak zdefiniowanego obiektu, zgodnie z zasadą wielokrotnego wyboru wyniesie $n(n-1)\dots 1$. Jasne jest, że w powyższym rozumowaniu zbiór A możemy zastąpić dowolnym zbiorem równolicznym, co kończy dowód.

□

Dalej potrzebna nam będzie następująca definicja.

Definicja 4 *(pojęcie silni)*
Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej k przyjmiemy

$$k! = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k, & k \geqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

Dlatego tezę Twierdzenia 3 możemy zapisać następująco.

Wniosek 3

$$|\mathcal{P}_n| = n! \tag{7}$$

Rozumowanie wykorzystane w dowodzie Twierdzenia 3, bazujące na zasadzie wielokrotnego wyboru zastosujemy teraz do przypadku ogólniejszego. Dla danego n-elementowego zbioru $A \subset X$ i dla liczby naturalnej k rozważymy zbiór $\mathcal{W}_n^k$, elementami którego są wszystkie różnowartościowe ciągi długości k o wyrazach należących do zbioru A. Warunek różnowartościowości oznacza, że $k \leqslant n$. Ponadto, wprost z definicji wynika, że $\mathcal{W}_n^n = \mathcal{P}_n$.

Definicja 5 *(pojęcie wariacji bez powtórzeń)*
Każdy elelement zbioru $\mathcal{W}_n^k$, dla $1 \leqslant k \leqslant n$ będziemy nazywali k-elementową wariacją bez powtórzeń zbioru n-elementowego.

Biorąc teraz obiekt złożony z k stanów i stosując zasadę wielokrotnego wyboru, tak jak zrobiono to w dowodzie Twierdzenia 3, możemy sformułować następujący wynik:

$$|\mathcal{W}_n^k| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n - (k-1)). \tag{8}$$

Zauważmy, że wynik przedstawiony w (8) można zapisać następująco

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n - (k-1)) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot (n-(k-1)) \cdot \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)},$$

czyli z definicji operacji *silni*

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{9}$$

Twierdzenie 4 *(o mocy zbioru wariacji bez powtórzeń)*
Dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$ *mamy*

$$|\mathcal{W}_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{10}$$

Co więcej moc zbioru $\mathcal{W}_n^k$ *nie zależy od wyboru zbioru* A*, o ile wybrany zbiór jest mu równoliczny.*

W sytuacji kiedy k jest dowolne, nie możemy wymagać aby zachodziła własność różnowartościowości. Należy w takim przypadku brać pod uwagę wszystkie ciągi o wyrazach ze zbioru A i długości k. Dalej zbiór wszystkich takich ciągów oznaczymy przez $\mathcal{V}_n^k$.

Definicja 6 *(pojęcie wariacji z powtórzeniami)*
Każdy element zbioru $\mathcal{V}_n^k$ *będziemy nazywali* k*-elementową wariacją z powtórzeniami zbioru* n*-elementowego.*

Uwaga 1
Dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$, $\mathcal{W}_n^k \subset \mathcal{V}_n^k$.

Twierdzenie 5 *(o mocy zbioru* $\mathcal{V}_n^k$*)*
Dla każdego $k \geqslant 1$ *zachodzi*

$$|\mathcal{V}_n^k| = n^k. \tag{11}$$

Co więcej, wynik ten jest niezależny od realizacji zbioru A*, o ile jest ona równoliczna z* A*.*

Dowód. Ponownie zastosujemy zasadę wielokrotnego wyboru. Tym razem obiekt składa się z k stanów i każdy z nich można obsadzać niezależnie (ze względu na możliwość powtórzeń) wszystkimi elementami zbioru A, co oznacza, że zachodzi warunek (11).

□

Uwaga 2
Ponieważ każdy element zbioru $\mathcal{V}_n^k$ *jest funkcją postaci*

$$f\colon\ B \to A,\ \textit{gdzie}\ |B| = k,\ |A| = n,$$

to oznaczając przez $\mathcal{F}(B, A)$ *zbiór wszystkich takich funkcji, z Twierdzenia 5 mamy*

$$|\mathcal{F}(B, A)| = n^k. \tag{12}$$

Zobaczmy jak wygląda sytuacja w przypadku, kiedy ciąg przyjmuje tylko dwie wartości. Dalej założymy, że mamy wtedy do czynienia z następującą sytuacją

$$(b_1, b_2, \ldots, b_k) \in \mathcal{F}(B, \{0,1\}), \text{ czyli } b_j \in \{0,1\}.$$

Każdy taki ciąg nazwiemy *ciągiem binarnym.* Zatem Uwaga 2 prowadzi nas do następującego wniosku.

Wniosek 4
Dla każdego naturalnego k moc zbioru wszystkich ciągów binarnych długości k wynosi 2^k, czyli

$$|\mathcal{F}(B, \{0,1\})| = 2^k. \tag{13}$$

Możemy teraz wrócić do problematyki rozważanej w Przykładzie 8 oraz 10. Z Przykładu 10 wiemy, że rodzina potęgowa $\mathcal{P}(A)$ oraz zbiór wszystkich funkcji $f\colon A \to \{0,1\}$, czyli $\mathcal{F}(A, \{0,1\})$ są równoliczne. Korzystając z własności równoliczności oraz wyniku (13) dostajemy

Wniosek 5 *(o mocy rodziny potęgowej)*
Dla każdego n-elementowego zbioru $A \subset X$ mamy

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}. \tag{14}$$

W dalszej części pokażemy jak wynik (14) można uzyskać inną metodą. Najpierw uogólnimy wynik opisany w Przykładzie 3.

Definicja 7 *(pojęcie kombinacji bez powtórzeń)*
Niech dany będzie n-elementowy zbiór $A \subset X$ oraz liczba całkowita nieujemna spełniająca warunki $0 \leqslant k \leqslant n$. Każdy k-elementowy podzbiór zbioru A będziemy nazywali k-elementową kombinacją bez powtórzeń n-elementowego zbioru A. Rodzinę wszystkich takich kombinacji oznaczymy przez $\mathcal{C}_n^k$.

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6 *(o mocy rodziny $\mathcal{C}_n^k$)*
Dla dowolnych liczb całkowitych $0 \leqslant k \leqslant n$, zachodzi równość

$$|\mathcal{C}_n^k||\mathcal{P}_k| = |\mathcal{W}_n^k|. \tag{15}$$

W szczególności dla $0 \leqslant k \leqslant n$

$$|\mathcal{C}_n^k| = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{16}$$

<u>Dowód.</u> zauważmy, że dla $k = 0$ wzór (15) jest prawdziwy – wtedy z definicji $|\mathcal{P}_k| = |\mathcal{W}_n^k| = 0$. Prawdziwy jest również wzór (16), bowiem $\mathcal{C}_n^0 = \{\emptyset\}$. Dlatego dalej możemy założyć, że $1 \leqslant k \leqslant n$. Definiujemy obiekt $\mathcal{O}$:

- składa się z dwóch stanów, czyli $\mathcal{O} = (s_1, s_2)$,
- stan s_1 odpowiada za wybór elementu ze zbioru $\mathcal{C}_n^k$,
- w ramach stanu s_2 dochodzi do uporządkowania wybranych elementów przechowywanych w stanie s_1.

Z zasady wielokrotnego wyboru zastosowanej do zdefiniowanego tak obiektu wynika, że

$$|\mathcal{O}| = |\mathcal{C}_n^k||\mathcal{P}_k|. \tag{17}$$

Ale każda konfiguracja obiektu $\mathcal{O}$ powstała w wyniku obsadzenia stanów s_1, s_2 jest k-elementową wariacją bez powtórzeń zbioru n-elementowego. I na odwrót, taka wariacja powstaje w wyniku procesu wyboru podzbioru i jego uporządkowania. Oznacza to, że zbiory $\mathcal{O}$ i $\mathcal{W}_n^k$ są równoliczne, co kończy dowód wzoru (15). Wzór (16) jest konsekwencją poprzedniego i Twierdzenia 3 oraz 4.

□

Dalej będziemy potrzebowali następującej definicji.

Definicja 8 *(Symbol Newtona-Pascala)*
Dla każdego $0 \leqslant k \leqslant n$ symbolem $\binom{n}{k}$ oznaczymy moc zbioru $\mathcal{C}_n^k$, czyli

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{18}$$

Jest to tzw. symbol Newtona-Pascala.

Na moment wrócimy do Przykładu 8 i wyniku (14). Niech $A \subset X$, gdzie $|A| = n$. Zliczymy rodzinę $\mathcal{P}(A)$ wykorzystują do tego celu zasadę addytywności. Podobnie jak w Przykładzie 8, zauważmy, że

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n,$$

gdzie $\mathcal{A}_j$ oznacza rodzinę złożoną ze wszystkich j-elementowych podzbiorów zbioru A. Z zasdy addytywności mamy

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| + \ldots + |\mathcal{A}_n|.$$

Z Definicji 7 i Twierdzenia 6 wynika, że $|\mathcal{A}_j| = \mathcal{C}_n^j = \binom{n}{j}$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Dlatego z Wniosku 5 mamy zależność

Twierdzenie 7 *(o własności symbolu Newtona-Pascala)*
Dla dowolnego naturalnego $n = |A|$

$$|\mathcal{P}(A)| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n. \tag{19}$$

4.3 Inne własności symbolu $\binom{n}{k}$

Fakt 2
Dla dowolnych $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{20}$$

<u>Dowód.</u> Wynika z uwagi, że zbiory $\mathcal{C}_n^k$, $\mathcal{C}_{n-k}^k$ są równoliczne.[9] Zatem z Definicji 8 mamy (20).

□

Fakt 3 *Weźmy* $n \geqslant 1$ *oraz ciąg symboli:*

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}.$$

Zwiększmy wartość n o jeden i napiszmy odpowiadający tej wartości ciąg symboli:

$$\binom{n+1}{0}, \binom{n+1}{1}, \binom{n+1}{2}, \ldots, \binom{n+1}{n-1}, \binom{n+1}{n} \binom{n+1}{n+1}.$$

Wtedy

1. $$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1.$$

2. *Dla każdego* $1 \leqslant j \leqslant n$
$$\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}$$

3. $$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n.$$

<u>Dowód.</u> W świetle interpretacji mnogościowej symbolu Newtona-Pascala, warunek pierwszy jest oczywisty. Warunek trzeci jest przepisaniem Twierdzenia 7. Pozostaje udowodnić warunek drugi. Z definicji symbolu Newtona-Pascala mamy

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n!j + n!(n-j+1)}{j!(n-j+1)!} =$$
$$= \frac{n!(n+1)}{j!(n+1-j)!},$$

co kończy dowód.

[9] Czytelnik powinien to udowodnić.

$\square$

Uwaga 3
Powyższe trzy własności bardzo dobrze widoczne są na przykładzie tzw. trójkąta Pascala, którego początek przedstawiono poniżej.

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & \binom{0}{0}=1 & & & & \\
n=1: & & & & \binom{1}{0}=1 & & \binom{1}{1}=1 & & & \\
n=2: & & & \binom{2}{0}=1 & & \binom{2}{1}=2 & & \binom{2}{2}=1 & & \\
n=3: & & \binom{3}{0}=1 & & \binom{3}{1}=3 & & \binom{3}{2}=3 & & \binom{3}{3}=1 & \\
n=4: & \binom{4}{0}=1 & & \binom{4}{1}=4 & & \binom{4}{2}=6 & & \binom{4}{3}=4 & & \binom{4}{4}=1
\end{array}$$

Fakt 4
Dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n-1$ mamy

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{21}$$

<u>Dowód.</u> Dowód metodą bezpośrednią, czyli poprzez zastosowanie definicji symbolu Newtona-Pascala pozostawimy Czytelnikowi. Pokażemy jak to można zrobić za pomocą MPZ. Weźmy zbiór $A \subset X$, gdzie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Definiujemy trzy rodziny podzbiorów zbioru A:

- $$\mathcal{A} = \mathcal{C}_n^k,$$
- $$\mathcal{A}_1 = \{B \subset A\colon a_1 \in B,\ |B| = k\},$$
- $$\mathcal{A}_2 = \{B \subset A\colon a_1 \notin B,\ |B| = k\},$$

Weźmy dowolny zbiór $B \in \mathcal{A}$. Wtedy $|B| = k$, oraz albo $a_1 \in B$, albo $a_1 \notin B$ i na odwrót. Dlatego

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2.$$

Wprost z definicji wynika, że rodziny te są rozłączne. Dlatego zasada addytywności daje nam równość

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2|.$$

Dalej zauważmy, że

$$B \in \mathcal{A}_1 \Leftrightarrow B = \{a_1\} \cup \tilde{B},\ \text{dla pewnego } \tilde{B} \in \mathcal{C}_{n-1}^{k-1},$$

co oznacza, że rodziny $\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_{n-1}^{k-1}$ są równoliczne.

Podobnie

$$B \in \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow B \in \mathcal{C}_{n-1}^{k},$$

co oznacza, że rodziny $\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_{n-1}^{k}$ są równoliczne. Ostatnie dwa stwierdzenia kończą dowód.[10]

□

Dalej będziemy potrzebowali twierdzenia o tzw. *dwumianie Newtona*. Ze względu na charakterystykę dowodu, twierdzenie to udowodnimy w Dodatku.

Twierdzenie 8 *(o dwumianie Newtona)*
Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, oraz każdej liczby całkowitej nieujemnej n zachodzi równość

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^n \quad (22)$$

lub w notacji skróconej

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \quad (23)$$

Uwaga 4
Wzór dwumianowy Newtona jest uogólnieniem znanych ze szkoły tzw. wzorów skróconego mnożenia.

Podstawiając w (23) $a = b = 1$ otrzymujemy znaną z Faktu 3 zależność

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Podstawiając z kolei $a = -1$, $b = 1$ dostajemy kolejną własność symbolu Newtona-Pascala.

Fakt 5
Dla każdego naturalnego n mamy

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0. \quad (24)$$

albo w postaci skróconej

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \quad (25)$$

[10]Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

5 Dodatek

Zaczniemy od wyjaśnienia ważnej metody mającej zastosowanie w MPZ – *zasady indukcji matematycznej* (ZIM). Dalej pokażemy jak za pomocą metody indukcji można udowodnić prawdziwość wzoru dwumianowego Newtona.

5.1 ZIM

Będziemy zajmowali się *formami zdaniowymi* zależnymi od argumentu naturalnego. Z definicji przyjmiemy, że

Definicja 9 *(formy zdaniowej)*
Przez formę zdaniową argumentu naturalnego będziemy rozumieli wypowiedź zależną od liczby naturalnej, która przy jej ustalonej wartości podlega ocenie w kategoriach prawdy lub fałszu. Dokładniej, każdej liczbie naturalnej $n \in N_o \subset \mathbf{N}$, *gdzie* $N_o = \{n \in \mathbf{N} \colon\ n \geqslant n_o,\ n_o \in \mathbf{N}\}$ *będzie przyporządkowana wypowiedź oznaczana przez* $T(n)$, *taka, że jeśli weźmiemy* $m \in N_o$, *to* $T(m)$ *będzie prawdą albo fałszem. Wtedy zbiór* N_o *będziemy nazywali dziedziną formy zdaniowej i będziemy pisali* $T(n),\ n \in N_o$.

Przykład 11
Następujące konstrukcje dają formy zdaniowe:

$$T(n):\ \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},\ \ n \geqslant 1,\ \ \textit{dla danych } a, b \in \mathbf{R},$$

$$T(n):\ \ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} n,\ \ n \geqslant 1,$$

$$T(n):\ \ (1+a)^n \geqslant 1 + na,\ \ n \geqslant 1,\ \ \textit{gdzie } a > -1 \textit{ ustalona.}$$

Dla zadanej formy zdaniowej $T(n),\ n \in N_o$ bierzemy zdanie $\forall_{n \in N_o}\ T(n)$. Pytanie brzmi: jak udowodnić prawdziwość tego zdania? Jasne jest, że jeśli dla pewnego $m \in N_o$, zdanie $T(m)$ jest fałszywe, to również zdanie $\forall_{n \in N_o}\ T(n)$ takie jest. Z kolei, jeśli prawdziwe są wszystkie zdania $T(m)$ dla każdego $m \in N_o$, to prawdziwe jest $\forall_{n \in N_o}\ T(n)$. Zatem odpowiedź na postawione pytanie sprowadza się do następującej kwestii: w jaki sposób wykazać, że mamy nieskończenie wiele zdań prawdziwych? Rozwiązanie tego problemu można uzyskać za pomocą kolejnego twierdzenia. Dalej umówimy się, że zapis $\forall_{n \in N_o}\ T(n)$ będzie oznaczał, że zdanie jest prawdziwe.

Twierdzenie 9 *(Zasada Indukcji Matematycznej)*

$$\forall_{n \in N_o}\ T(n)\ \Leftrightarrow \Big(T(n_o)\ \wedge (\forall_{k \geqslant n_o}\ T(k) \Rightarrow T(k+1) \Big).$$

Dowód. Wystarczy tylko pokazać[11] prawdziwość implikacji $\Leftarrow$. Przypuśćmy, że prawdziwe jest zdanie $T(n_o) \ \wedge (\forall_{k \geqslant n_o} T(k) \Rightarrow T(k+1))$ oraz dla pewnego $m \in N_o$ zdanie $T(m)$ jest fałszywe. Z założenia musi być: $m > n_o$. Weźmy zbiór $F = \{2, .3, \ldots, m_o - 1\}$. Z założenia dla każdego $k \in F$, zdanie $T(k)$ musi być fałszywe. W takim razie $T(n_o)$ również, co prowadzi do sprzeczności i kończy dowód.

$\square$

Uwaga 5
Występujący w ZIM warunek $T(n_o)$ nazywany jest warunkiem inicjującym. Implikację $T(k) \Rightarrow T(k+1)$ nazywamy krokiem indukcyjnym. Dowód prawdziwości tego kroku sprowadza się do pokazania, że z prawdy wynika prawda. Wtedy poczynione w takim dowodzie założenie, że zdanie $T(k)$ jest prawdziwe nazywamy założeniem indukcyjnym. Natomiast $T(k+1)$ nazywamy wtedy tezą indukcyjną.

Wykorzystując nazewnictwo wprowadzone w powyższej uwadze możemy powiedzieć, że

Wniosek 6
Przeprowadzenie dowodu metodą ZIM sprowadza się do:

1. *wykazania, że warunek inicjujący jest spełniony, czyli, że jest prawdziwy;*
2. *wykazania prawdziwości kroków indukcyjnych, poprzez pokazanie, że założenie indukcyjne implikuje prawdziwość tezy indukcyjnej.*

Przykład 12 *(dowód metodą ZIM wzoru dwumianowego)*
Niech forma zdaniowa $T(n)$, $n \geqslant n_o$ będzie zadana jak niżej

$$T(n)\colon \ (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}, \ n \geqslant 1, \ \textit{dla ustalonych } a, b \in \mathbf{R}.$$

Zdanie $T(1)$ jest prawdziwe, bowiem

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b.$$

Udowodnimy prawdziwość kroku indukcyjnego. W tym celu weźmy dowolne $k \geqslant 1$ i załóżmy prawdziwość zdania

$$T(k)\colon \ (a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}.$$

[11] Czytelnik powinien umieć to uzasadnić.

Będzie to nasze założenie indykcyjne. Z tego wyprowadzimy prawdziwość zdania

$$T(k+1)\colon\ (a+b)^{k+1}=\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}a^jb^{k+1-j}.$$

Mianowicie

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)\overset{zal.\ ind.}{=}(a+b)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^jb^{k-j}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(a+b)a^jb^{k-j}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(a^{j+1}b^{k-j}+a^jb^{k-j+1})=\underbrace{\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{j+1}b^{k-j}}_{S_1}+\underbrace{\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^jb^{k-j+1}}_{S_2}.$$

Każdą ze sum S_1, S_2 *odpowiednio przekształcimy – dla* S_1 *dokonamy podstawienia* $j+1=i$*, co da nam*

$$S_1=\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}a^ib^{k-(i-1)}=\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i-1}a^ib^{k-(i-1)}+\binom{k}{k}a^{k+1}.$$

S_2 *zapiszemy w postaci*

$$S_2=\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}a^jb^{k-j+1}+\binom{k}{0}b^{k+1}.$$

Stąd

$$S_1+S_2=\sum_{j=1}^{k}\left(\binom{k}{j-1}+\binom{k}{j}\right)a^jb^{k-j+1}+a^{k+1}+b^{k+1}.$$

Ale z Faktu 4

$$\binom{k}{j-1}+\binom{k}{j}=\binom{k+1}{j},$$

dlatego ponieważ $a^{k+1}+b^{k+1}=\binom{k+1}{k+1}a^{k+1}+\binom{k+1}{0}b^{k+1}$*, otrzymamy*

$$(a+b)^{k+1}=S_1+S_2=\sum_{j=1}^{k}\binom{k+1}{j}a^jb^{k+1-j}+\binom{k+1}{k+1}a^{k+1}+\binom{k+1}{0}b^{k+1}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}a^jb^{k+1-j},$$

co oznacza, że zdanie $\forall_{k\geqslant 1}\ T(k)\Rightarrow T(k+1)$ *jest prawdziwe. Zatem na mocy ZIM prawdziwe jest zdanie* $\forall_{n\geqslant 1}T(n)$*, co kończy dowód wzoru dwumianowego.*

5.2 Przykłady

Przykład 13

Ile wszystkich ciągów binarnych długości $n \geqslant 2$ zawiera dokładnie $0 \leqslant k \leqslant n$ jedynek.

Rozwiąznie. Niech $Bin_n = \{\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n),\ b_j \in \{0,1\}\}$. Dla $0 \leqslant k \leqslant n$ definiujemy zbiór $A_k \subset Bin_n$,

$$\overline{b} \in A_k \Leftrightarrow \overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ oraz } |\{j \in \{1,2,\ldots,n\}\colon\ b_j = 1| = k.$$

Aby zliczyć zbiór A_k należy zauważyć, że jest on równoliczny z $\mathcal{C}_n^k$. Istotnie, każdy ciąg $\overline{b} \in A_k$ wyznacza jednoznacznie k-elementowy podzbiór zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ postaci $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, gdzie $b_{j_i} = 1,\ i = 1,2,\ldots,k$. Na przykład, jeśli $\overline{b} = (1,0,0,1,0,0,0,1), (n = 8,\ k = 3)$, odpowiada mu podzbiór $\{1,4,8\}$ – są to numery wyrazów przyjmujących wartość jeden. Dlatego $|A_k| = \binom{n}{k}$.

Przykład 14

Ile jest wszystkich ciągów binarnych długości $n \geqslant 2$, w których symbol 1 pojawia się co najmniej k-razy.

Rozwiąznie. Niech A_j ma znaczenie jak w przykładzie powyżej. Definiujemy zbiór $A_{\geqslant k}$ – w ciągu binarnym długości n symbol 1 pojawia się co najmniej k-razy. Zauważmy, że

$$A_{\geqslant k} = A_k \cup A_{k+1} \cup \ldots \cup A_n,$$

oraz zbiory A_j są parami rozłączne. Z zasady addytywności i wyniku poprzedniego przykładu możemy napisać

$$|A_{\geqslant k}| = |A_k| + |A_{k+1}| + \ldots + |A_n| = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}.$$

Przykład 15

Ile jest liczb 6-cyfrowych, w których w zapisie dziesiętnym cyfra 0 występuje dokładnie 3 razy, cyfra 5 dokładnie raz?

Rozwiązanie. Weźmy zbiór L_6, gdzie

$$L_6 = \{l = (c_5, c_4, c_3, c_2, c_1, c_0) = c_0 + 10c_1 + 10^2c_2 + 10^3c_3 + 10^4c_4 + 10^5c_5,$$

$$c_5 \in \{1,2,\ldots,9\},\ c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \{0,1,\ldots,9\}.$$

Dla $A \subset L_6$ niech

$$l \in A \Leftrightarrow \exists_{i_1,i_2,i_3 \in \{0,1,2,3,4,\}}\ \exists_{i_4 \in \{0,1,2,3,4,5\} \setminus \{i_1,i_2,i_3\}}\ c_{i_1} = c_{i_2} = c_{i_3} = 0, c_{i_4} = 5$$

oraz $c_i \notin \{0,5\}$ dla $\ i \in \{0,1,2,3,4,5\} \setminus \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Do zliczenia zbioru A posłużymy się zasadą wielokrotnego wyboru. W tym celu rozważymy obiekt złożony z trzech stanów $\mathcal{O} = (s_1, s_2, s_3)$, gdzie:

1. s_1 odpowiada za obsadzenie w liczbie l cyfry 0,
2. s_2 – cyfry 5,
3. s_3 – pozostałych cyfr.

Z definicji stanów mamy: $s_1 \equiv \mathcal{C}_5^3$, $s_2 \equiv \mathcal{C}_3^1$, $s_3 \equiv \mathcal{V}_7^2$. Dlatego $|A| = \binom{5}{3}\binom{3}{1}7^2$.

Przykład 16
Ile jest wszystkich liczb 8-cyfrowych, w których iloczyn cyfr w zapisie dziesiętnym daje liczbę 12?

Rozwiązanie. Niech L_8 ma podobne znaczenie jak L_6 w Przykładzie 15. Mamy zliczyć zbiór

$$A = \{l = (c_7, c_6, \dots, c_1, c_o) \in L_8 \colon \ c_0 c_1 \cdot \ldots \cdot c_7 = 12\}.$$

Warunek

$$c_0 c_1 \cdot \ldots \cdot c_7 = 12, \text{ gdzie } c_0, c_1, \dots, c_7 \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

poprzez swoje rozwiązanie zadaje strukturę zbioru A. Istotnie, każde rozwiązanie powyższego warunku wynika z *faktoryzacji* liczby 12 za pomocą liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 9\}$. Mamy kolejno:

1. $12 = 1 \cdot 2 \cdot 6$,
2. $12 = 1 \cdot 3 \cdot 4$,
3. $12 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3$.

Dlatego możemy napisać

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

gdzie: A_1 oznacza, że w $l \in A$ cyfry $2, 6$ pojawiają się dokładnie raz, cyfra 1 – 6 razy, A_2 – cyfry $3, 4$ dokładnie raz, cyfra 1 – 6 razy, A_3 – cyfra 3 dokładnie raz, cefra 2 dwa razy, cyfra 1 – 5 razy. Z zasady addytywności dostajemy

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3|.$$

Pozostaje wyznaczyć moce składników A_1, A_2, A_3, co możemy zrobić metodą opisaną w powyższym przykładzie.

6 Zakończenie

Na 22 stronach udało nam się zamieścić podstawy metodologii zliczania zbioru skończonego. Ważnym pojęciem okazuje się być tutaj koncepcja *liczby kardynalnej* bazująca na zjawisku *równoliczności* i jej konsekwencjach. Na ogół uważa się, że ta tematyka jest trudna, bowiem sięga ona po wszelkie dostępne narzędzia wywodzące się z wielu dziedzin matematyki. W nazewnictwie od kilkunastu lat przyjęła się nazwa *matematyka dyskretna*. Powszechnie znana Czytelnikowi *kombinatoryka* jest tylko działem tej teorii. Zapraszamy Czytelnika do dalszego studiowania polecając dwie podane poniżej książki oraz zamieszczoną w nich bibliografię.

1. Ryszard Rębowski, *Matematyka dyskretna dla informatyków*, Seria wydawnicza PWSZ im. Witelona w Legnicy, Legnica 2008,

2. Ryszard Rębowski, *Podstawy metod probabilistycznych i statystyki matematycznej*, Seria wydawnicza PWSZ im. Witelona w Legnicy, Legnica 2015.