

Liczbę

$$E(\mathbf{X} - E\mathbf{X})^2$$

nazywamy *momentem centralnym drugiego rzędu*. Częściej mówi się jednak o *wariancji* zmiennej losowej, którą oznaczamy przez $var(\mathbf{X})$.

Zatem powyższy przykład wyjaśnia, że

$$var(\mathbf{X}) = m_2 - m_1^2,$$

o ile istnieje drugi moment zmiennej losowej $\mathbf{X}$.

Czasami zamiast wariancji będziemy posługiwali się jej pierwiastkiem. Będziemy wtedy mówili o *dyspersji rozkładu*, czyli

$$\sqrt{var\mathbf{X}} = \sqrt{m_2 - m_1^2}.$$

Weźmy teraz dwie zmienne losowe $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$. Pokażemy teraz w jaki sposób można uogólnić ważne pojęcie jakim jest stochastyczna niezależność zdarzeń na przypadek zmiennych losowych. Problemem tym zajmiemy się dokładniej w rozdziale 4.

Definicja 3.3.4 Powiemy, że zmienne losowe $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ są niezależne, jeśli dla dowolnych liczb rzeczywistych t, s następujące zdarzenia

$$\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) < t\} \text{ i } \{\omega \in \Omega : \mathbf{Y}(\omega) < s\}$$

są niezależne, a więc

$$P(\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) < t\} \cap \{\omega \in \Omega : \mathbf{Y}(\omega) < s\}) =$$

$$P(\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) < t\}) P(\{\omega \in \Omega : \mathbf{Y}(\omega) < s\}) = F_{\mathbf{X}}(t)F_{\mathbf{Y}}(s).$$

Przykład 3.3.4 Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, A, B zdarzeniami stochastycznie niezależnymi, a więc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Zdefiniujemy dwie zmienne losowe $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$, gdzie

$$\mathbf{X}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases}$$

i podobnie

$$\mathbf{Y}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in B \\ 0, & \omega \notin B, \end{cases}$$

Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie, że tak zdefiniowane odwzorowania są zmiennymi losowymi o rozkładzie dyskretnym skończonym. Zatem obie mają wartości oczekiwane równe odpowiednio:

$$E\mathbf{X} = 1 \cdot P(\{\omega \in \Omega: \mathbf{X}(\omega) = 1\}) + 0 \cdot P(\{\omega \in \Omega: \mathbf{X}(\omega) = 0\}) = P(A)$$

i podobnie $E\mathbf{Y} = P(B)$.

Weźmy iloczyn tych zmiennych losowych $\mathbf{XY}$. Wtedy

$$E(\mathbf{XY}) = 1 \cdot P(\{\omega \in \Omega: \mathbf{X}(\omega)\mathbf{Y}(\omega) = 1\}) = P(A \cap B).$$

Ponieważ zdarzenia A i B są stochastycznie niezależne

$$E(\mathbf{XY}) = P(A)P(B) = (E\mathbf{X})(E\mathbf{Y}).$$

Uwaga 3.3.3 Jeśli $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ są niezależne i mają wartości oczekiwane, to

$$E(\mathbf{XY}) = (E\mathbf{X})(E\mathbf{Y}).$$

W dalszym ciągu potrzebne będą nam następujące własności wariancji:

Twierdzenie 3.3.2 Niech $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ mają drugie momenty, $a \in \mathbf{R}$. Wtedy

1. Jeśli $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ są niezależne, to wariancja sumy tych zmiennych jest sumą ich wariancji, czyli

$$\text{var}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \text{var}(\mathbf{X}) + \text{var}(\mathbf{Y}).$$

- 2.

$$\text{var}(a\mathbf{X}) = a^2 \text{var}(\mathbf{X}).$$

3. Wariancja zmiennej losowej stałej jest równa zero.

Rzeczywiście, korzystając z wyniku podanego w Przykładzie 3.3.3, mamy

$$\text{var}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{E}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^2 - (\mathbf{E}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}))^2 =$$

$$E(\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + 2\mathbf{XY}) - (E\mathbf{X})^2 - (E\mathbf{Y})^2 - 2(E\mathbf{X})(E\mathbf{Y}) =$$