Podstawy kształcenia matematycznego
Wykład 2
Wprowadzenie do logiki matematycznej
15 lutego 2010

1 Precyzja komunikowania się

Każdy proces edukacji opiera się na możliwości i potrzebie komunikowania się. W przypadku nauczania matematyki bardzo trafnie ujął to wielki matematyk polski Hugo Steinhaus, który na pytanie

Po co ludzie uczą się matematyki?

odpowiadał

Żeby uczyć matematyki innych.

Zakładając, że werbalny (czyli przy użyciu języka naturalnego) sposób komunikowania się pomiędzy nauczającym i uczącym się stanowi podstawę w procesie edukacji, stajemy przed potrzebą *precyzyjnego* formułowania swoich myśli. Precyzyjnego, czyli jakiego? Spróbujmy najpierw odpowiedzieć sobie na pytanie czym taka wypowiedź precyzyjna wyróżnia się spośród pozostałych wypowiedzi. Odpowiemy–na pewno tym, że spełnione są co najmniej następujące kryteria:

1. proces przekazu będzie miał charakter merytoryczny,
2. proces przekazu będzie wydajny w czasie,
3. będzie umożliwiał interakcję ze strony słuchacza,
4. będzie wspomagał procesy myślowe towarzyszące nauczaniu matematyki, zwane potocznie *myśleniem matematycznym*, a więc oparte na pojęciu *założenia*, *definicji*, *twierdzenia* i umiejętności na tej podstawie wnioskowania, stawiania hipotez, uogólniania,
5. adresatem procesu przekazu będzie możliwie jak największa grupa słuchaczy.

Nie trudno zauważyć, że aby od wypowiedzi można było oczekiwać takich efektów powinna ona mieć pewną własność–powinna dać się *wycenić*, co najmniej w kategoriach *prawdy* albo *fałszu*. Mówiąc inaczej, dla takiej wypowiedzi powinien być możliwy osąd, być może o charakterze *apriori* (czyli bez potrzeby dowodzenia), albo o charakterze *a posteriori* (jako efekt procesu poznawczego), którego efektem będzie *wartość logiczna* takiej wypowiedzi. Upraszczając dalej notację umówimy się, że kategorię *prawda* zakodujemy symbolem 1, kategorię *fałsz* symbolem 0. Jeśli przez p oznaczymy teraz naszą wypowiedć, to oczekujemy od niej aby można było stwierdzić (być może z potrzebą uzasadnienia), że jest ona prawdziwa albo fałszywa, co będziemy dalej zapisywali następująco:

$$p \equiv 1, \;\; p \equiv 0.$$

Definicja 1.1 *Każdą wypowiedź spełniającą powyższe kryterium wyceny logicznej będziemy nazywali zdaniem logicznym.*

Przykład 1.1 *Pokazać, że nie każde zdanie w rozumieniu gramatyki języka polskiego jest zdaniem logicznym. Na tym i innych przykładach przedyskutować ograniczone znaczenie takich wypowiedzi w kontekście kryteriów zdefiniowanych powyżej.*

Przez $\mathbb{L}$ oznaczmy mnogość pewnych zdań logicznych. Jeśli teraz dane będzie zdanie logiczne p, to będziemy pisali $p \in \mathbb{L}$ i będziemy czytali *p jest elementem (należy do) mnogości* $\mathbb{L}$. W przeciwnym razie będziemy pisali $p \notin \mathbb{L}$ i czytali *p nie jest elementem (nie należy do) mnogości* $\mathbb{L}$. Dalej zdanie pojawiające się w takim kontekście (jako samodzielne) będziemy nazywali też *zdaniem prostym.* Jeśli dla dwóch zdań $p, q \in \mathbb{L}$ ich wartości logiczne są jednakowe (mogą różnić się treściami), to powiemy, że zdania te są *równoważne* i będziemy pisali $p \equiv q$.

Przykład 1.2 *Podać przykłady zdań równoważnych.*

Przykład 1.3 *Uzasadnić, że równoważność zdań ma następujące własności:*

1.
$$\forall_{p\in\mathbb{L}} \; p \equiv p,$$

2.
$$\forall_{p,q\in\mathbb{L}} \; \textit{jeśli } p \equiv q, \;\; \textit{to } q \equiv p,$$

3.
$$\forall_{p,q,r\in\mathbb{L}} \; \textit{jeśli } p \equiv q \; \textit{i} \; q \equiv r, \;\; \textit{to } p \equiv r,$$

gdzie symbol $\forall$ *czytamy "dla każdego" i nazywamy kwantyfikatorem ogólnym.*

2 Zdanie złożone. Pojęcie tautologii

Zbudujemy teraz gramatykę na zdaniach prostych–podając zasady i własności takich konstrukcji. Podstawowym pojęciem będzie dla nas pojęcie *funktora*. Ze względu na jego zasięg możemy mówić o funktorach *jednoargumentowych* i *dwuargumentowych*.

Definicja 2.1 *Funktorem jednoargumentowym na mnogości zdań $\mathbb{L}$ nazywamy każde przyporządkowanie f, które każdemu elementowi $p \in \mathbb{L}$ przyporządkowuje dokładnie jedno zdanie $q \in \mathbb{L}$, które oznaczamy też $f(p)$ i nazywamy zdaniem złożonym odpowiadającym zdaniu p. Zapisujemy to też następująco*

$$\mathbb{L} \ni p \longrightarrow f(p) = q \in \mathbb{L}.$$

Ważnym przykładem takiego funktora jest *funktor negacji* zwany też *zaprzeczeniem.*

Definicja 2.2 *Dla każdego zdania p niech $\neg p$ oznacza wypowiedź, której treść jest następująca*

nie prawda, *że p.*

Wtedy $\neg p$ będziemy nazywali negacją wypowiedzi p. Przyjmiemy, że wypowiedź $\neg p$ jest prawdziwa (fałszywa), jeśli p jest zdaniem fałszywym (prawdziwym).

Fakt 2.1 *Dla każdego zdania p, wypowiedź $\neg p$ jest zdaniem logicznym. W takim razie $\neg$ jest (jednoargumentowym) funktorem negacji.*

Dowód Wynika wprost z powyższej definicji, którą możemy zapisać w postaci tzw. *tabeli logicznej*

p	$\neg p$
1	0
0	1

Następujące twierdzenie (dowód pozostawiamy Czytelnikowi) tłumaczy podstawową własność funktora negacji

Twierdzenie 2.1 *Dla każdego zdania p mamy:*

$$\neg(\neg p) \equiv p \text{ (zasada podwójnej negacji).}$$

Zdanie złożone $\neg(\neg p) \equiv p$ występujące w powyższym twierdzeniu jest zawsze prawdziwe, bez względu na wartości logiczne zdania prostego. Dalej takie zdanie będziemy nazywali *tautologią*.

Uwaga 2.1 *Z zasadą podwójnej negacji należy postępować bardzo ostrożnie. Problem polega na tym, że w gramatyce języka polskiej funkcjonuje ona niewłaściwie, np. zamiast mówić "mam nic", mówimy, że "nie mamy nic". Z drugiej strony bardzo często niewłaściwie stosujemy zasadę negacji, co w zestawieniu z wcześniejszą uwagą może rodzić określone komplikacje. Dokładniej, jeśli wypowiedź brzmi*

"ten przedmiot jest koloru zielonego",

bardzo często rezygnujemy z poprawnej konstrukcji negacji

"ten przedmiot **nie jest** *koloru zielonego"*

na korzyść wypowiedzi

"ten przedmiot jest niezielony".

Czytelnikowi pozostawiamy uzasadnienie, że ostatnie dwie wypowiedzi nie są równo--ważne.

Przejdziemy teraz do omówienia *funktorów dwuargumentowych*. Pokażemy, że z formalnego punktu widzenia można mówić tylko o dwóch takich funktorach, aczkolwiek z praktycznego punktu widzenia warto myśleć, że jest ich sześć.

Definicja 2.3 *(alternatywy) Ustalmy dwa zdania $p, q \in \mathbb{L}$ według porządku: najpierw zdanie p, potem zdanie q, co symbolicznie zapiszemy jako (p, q) i nazwiemy parą uporządkowaną zdań p i q. Przyporządkujmy takiej parze wypowiedź $r = f(p, q)$, która ma treść*

p **lub** q.

Wypowiedź tę dalej będziemy oznaczali $p \vee q$ i nazywali alternatywą zdań p i q, czyli $r = f(p, q) = p \vee q$. Przyjmiemy, że $p \vee q \equiv 1$ dokładnie wtedy, jeśli co najmniej jedno ze zdań prostych jest zdaniem prawdziwym.

Fakt 2.2 *Dla dowolnych zdań p, q wypowiedź $p \vee q$ jest zdaniem logicznym, w takim razie $\vee$ jest (dwuargumentowym) funktorem, zwanym też funktorem alternatywy.*

Dowód Wystarczy zauważyć, że z definicji alternatywy mamy

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Podstawowe tautologie związane z funktorem alternatywy formułuje kolejne twierdzenie. Jego dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Twierdzenie 2.2 *Dla dowolnych zdań p, q, r mamy:*

1.
$$p \vee q \equiv q \vee p \text{ (przemienność)},$$

2.
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \text{ (łączność)},$$

3.
$$p \vee (\neg p) \equiv 1 \text{ (zasada tertium non datur–wyłączonego środka)};$$

4.
$$p \vee 0 \equiv p \text{ (zasada identyfikacji)},$$

5.
$$p \vee 1 \equiv 1 \text{ (zasada dominacji)}.$$

Wykorzystując teraz dwa zdefiniowane funktory: $\neg$ i $\vee$, zdefiniujemy następne cztery funktory dwuargumentowe. Zaczniemy od funktora *alternatywy wykluczającej* oznaczanej tutaj przez $\oplus$, gdzie wypowiedź $p \oplus q$ czytamy

p **albo** q

i wyceniana jest według zasady

$$p \oplus 1 \equiv 1 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } p \equiv 0,$$

$$p \oplus 0 \equiv 1 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } p \equiv 1.$$

Jako ćwiczenie pozostawiamy do uzasadnienia następujący fakt

Fakt 2.3 *Dla dowolnych dwóch zdań p i q mamy*

$$p \oplus q \equiv \neg(p \equiv q).$$

Weźmy teraz zdanie

$$\neg\Big((\neg p) \vee (\neg q)\Big).$$

Nietrudno jest zauważyć (pozostawiamy to Czytelnikowi), że zdanie to jest prawdziwe dokładnie wtedy gdy oba zdania p, q są prawdziwe. Traktując ostatni zapis i stwierdzenie jako *macro*, w tym sensie zdefiniujemy nowy funktor, zwany *funktorem koniunkcji*, oznaczany przez $\wedge$ następująco

Definicja 2.4 *(koniunkcji) Dla dowolnej pary zdań (p, q), wypowiedź $p \wedge q$ będziemy czytali*

p **i** q

i nazywali koniunkcją zdań p, q. Przyjmiemy, że wypowiedź $p \wedge q$ jest prawdziwa dokładnie wtedy kiedy oba zdania są prawdziwe.

Jako ćwiczenie zostawiamy Czytelnikowi do uzasadnienia kolejny fakt

Fakt 2.4 *Dla dowolnych dwóch zdań koniunkcja jest zdaniem logicznym. Dlatego $\wedge$ jest funktorem dwuargumentowym.*

Podobnie jako ćwiczenie zostawiamy do wykazania prawdziwość następującego twierdzenia

Twierdzenie 2.3 *Dla dowolnych zdań p, q, r mamy:*

1.

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \text{ (przemienność)},$$

2.

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \ \textit{(łączność)},$$

3.

$$p \wedge 1 \equiv p \ \textit{(zasada identyfikacji)},$$

4.

$$p \wedge 0 \equiv 0 \ \textit{(zasada dominacji)},$$

5.

$$p \wedge (\neg p) \equiv 0 \ \textit{(zasada sprzeczności)}\ .$$

Na uwagę zasługuje jeszcze jedna tautologia mająca związek z funktorami $\vee$ i $\wedge$–zasada negacji tych funktorów. Wróćmy do zdania złożonego $\neg\Big((\neg p) \vee (\neg q)\Big)$. Jak wiemy

$$p \wedge q \equiv \neg\Big((\neg p) \vee (\neg q)\Big)$$

zachodzi dla dowolnych zdań p, q. Korzystając z zasady podwójnej negacji, ostatni związek możemy zapisać następująco

$$\neg\Big(p \wedge q\Big) \equiv (\neg p) \vee (\neg q),$$

co oznacza, że negacją koniunkcji zdań jest alternatywa negacji tych zdań. Tautologię tę nazywamy *prawem de Morgana*. Jako ćwiczenie pozostawiamy Czytelnikowi sformułowanie i uzasadnienie drugiego prawa de Morgana (zasady negacji alternatywy).

Ostatni funktor, jako najmniej intuicyjny, jest najtrudniejszy. Z drugiej strony jego rola w matematyce jest największa. Dlatego zwrócimy szczególną uwagę na jego znaczenie i sposób posługiwania się. Wcześniej sygnalizowaliśmy, że funktor ten da się pozyskać konstruując odpowiednie macro z funktorów negacji i alternatywy. Wyjątkowo odwrócimy zapowiadany scenariusz–najpierw zdefiniujemy ten funktor, a dopiero na koniec zwrócimy uwagę na jego pochodzenie.

Definicja 2.5 *(implikacji) Dla dowolnej pary zdań (p, q), wypowiedź $p \rightarrow q$ będziemy czytali*

jeśli p **to** q

i nazywali implikacją zdań p, q. Przyjmiemy, że wypowiedź $p \rightarrow q$ jest prawdziwa dokładnie wtedy kiedy $p \equiv 0$ oraz kiedy oba zdania są prawdziwe.

Następujący fakt (zostawiamy go jako ćwiczenie) wyjaśnia znaczenie symbolu implikacji $\rightarrow$

Fakt 2.5 *Implikacja jest zdaniem logicznym, a więc $\rightarrow$ jest funktorem dwuargumentowym. Dla implikacji $p \rightarrow q$ tabela logiczna wygląda następująco*

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
0	1	1
0	0	1
1	0	0

Uwaga 2.2 *Pisząc, że funktor $\rightarrow$ jest nieintuicyjny mieliśmy oczywiście na myśli zapis drugi i trzeci powyższej tabeli. Celem głębszej analizy tych i pozostałych przypadków zachęcam do lektury mojej książki "Matematyka dyskretna dla informatyków".*

Twierdzenie 2.4 *(o implikacji) Dla dowolnych zdań p, q mamy:*

1.
$$\neg\Big((p \rightarrow q) \equiv (q \rightarrow p)\Big),$$

2.
$$p \rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q,$$

3.
$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q) \ \textit{(zasada negacji)},$$

4.
$$p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p) \ \textit{(zasada transpozycji)}.$$

<u>Dowód</u> Warunek pierwszy mówi, że implikacja nie jest przemienna i wynika wprost z analizy tabeli logicznej. Ponieważ zdanie $(\neg p) \vee q$ jest fałszywe tylko wtedy gdy $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, więc warunek drugi jest prawdziwy. Z prawa de Morgana i warunku drugiego dostajemy zasadę negacji implikacji–warunek trzeci. Ponieważ

$$(\neg p) \vee q \equiv q \vee (\neg p) \equiv \neg(\neg q) \vee (\neg p) \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p),$$

dostajemy prawdziwość warunku czwartego.

Zachęcamy Czytelnika do wykazania prawdziwości powyższego twierdzenia metodą tabeli logicznej.

Uwaga 2.3 *1. Wykazanie prawdziwości implikacji sprowadzaq się tylko do pokazania, że z prawdy wynika prawda.*

2. *Z warunku pierwszego powyższego twierdzenia widzimy, że implikacja, jako zdanie złożone, wykazuje asymetrię. W praktyce oznacza to, że musimy zwracać baczną uwagę na treści zdań p i q i na ich kolejność w implikacji. Jeśli zdanie $p \to q$ jest prawdziwe, to z prawdziwości zdania p musi wynikać prawdziwość zdania q. Z tego powodu mówimy, że p jest warunkiem dostatecznym dla q, ale nie koniecznie na odwrót.*

3. *Symbolem $\Rightarrow$ będziemy oznaczali funktor wynikania logicznego. Jeśli napiszemy $p \Rightarrow q$, to będzie to oznaczało, że zdanie $p \to q$ jest tautologią, a więc (patrz uwaga wyżej) z prawdziwości zdania p będzie wynikała prawdziwość zdania q.*

4. *Z zasady transponowania wynika, że jeśli implikacja $p \to q$ jest prawdziwa, to jeśli nie zajdzie zdanie q, to również nie zajdzie zdania p. Dlatego mówimy, że w tym przypadku zdanie q jest warynkiem koniecznym dla zdania p. Zauważmy, że wtedy zdanie q jest słabsze od zdania p (bowiem q nie musi implikować p).*

5. *Oznaczmy przez s dowolne zdanie, które jest fałszywe. Bardzo często takie zdanie nazywamy też zdaniem sprzecznym. Zauważmy, że dla dowolnych zdań p, q mamy tautologię zwaną reductio absurdum, ważną w teorii dowodzenia twierdzeń*
$$p \to q \equiv (p \land (\neg q)) \to s.$$
Istotnie, jeśli $p \to q$ jest prawdą, to z zasady negacji implikacji, $p \land (\neg q)$ jest fałszem–zatem zdanie po prawej stronie jest prawdą. W sytuacji przeciwnej implikacja $(p \land (\neg q)) \to s$ jest fałszem, ponieważ zdanie s jest sprzeczne.

6. *Najważniejszym zdaniem w teorii matematycznej jest twierdzenie matematyczne. Jego struktura jest następująca*
$$Z \Rightarrow T,$$
gdzie zdanie Z nazywamy założeniem, zdanie T–tezą twierdzenia.

Przykład 2.1 *Uzasadnić za pomocą rachunku zdań, że $[p \land (p \to q)] \Rightarrow q$.*

Zgodnie ze znaczeniem funktora $\Rightarrow$, wystarczy pokazać, że zdanie złożone $[p \land (p \to q)] \to q$ jest tautologią. W tym celu przedstawimy implikację za pomocą alternatywy i skorzystamy z prawa de Morgana.

Dostaniemy odpowiednio

$$[p \wedge (p \to q)] \to q \equiv \neg\Big(p \wedge (\neg p \vee q)\Big) \vee q \equiv \neg p \vee \Big(\neg(\neg p \vee q)\Big) \vee q.$$

Po skorzystaniu z zasady łączności i przemienności alternatywy oraz prawa de Morgana będziemy mogli napisać

$$[p \wedge (p \to q)] \to q \equiv \Big((\neg p) \vee q\Big) \vee \Big(p \wedge (\neg q)\Big),$$

co oznacza, że zdanie po prawej stronie ma postać

$$(p \to q) \vee (\neg(p \to q)),$$

a to z kolei z zasady wyłączonego środka jest tautologią.

3 Predykat jako uogólnienie zdania

Z wielu powodów na wypowiedź, a w szczególności na zdanie logiczne należy spojrzeć ogólniej. Wyobraźmy sobie, że z pewnych powodów (np. zapomnieliśmy) w wypowiedzi będącej zdaniem logicznym pominęliśmy pewną część mowy. Możemy zatem mieć do czynienia z następującą sytuacją

"To przedstawienie rozpoczyna się ... ",

bowiem w chwili formułowania tej wypowiedzi być może nie znaliśmy terminu rozpoczęcia tego przedstawienia. Przeformułujmy tę wypowiedź wypełniając puste miejsce w tej wypowiedzi symbolem "x". Dostaniemy wtedy konstrukcję

"To przedstawienie rozpoczyna się x",

które symbolicznie oznaczymy dalej przez $\varphi(x)$. Z treści wypowiedzi $\varphi(x)$ wynika, że za symbolem "x" kryje się jakaś forma daty. Niech D oznacza pewną mnogość takich form dat. Wtedy dla ustalonego elementu $x_o \in D$ wypowiedź $\varphi(x_o)$ staje się już zdaniem logicznym. Dla przykładu biorąc

x_o="17 lutego br.",

otrzymujemy wypowiedź

$\varphi(x_o)$="To przedstawienie rozpoczyna się 17 lutego br. ",

która jest zdaniem logicznym.

Prowadzi to nas do następującej definicji

Definicja 3.1 *Każdą wypowiedź $\varphi(x)$ dla $x \in D$, która staje się zdaniem logicznym dla każdej ustalonej wartości $x_o \in D$ nazywamy predykatem jednoargumentowym z dziedziną D. Wtedy $x \in D$ nazywamy zmienną lub argumentem predykatu φ.*

Uwaga 3.1 *Jeśli piszemy $\varphi(x)$, to zakładamy, że argument x przyjmuje dowolne wartości z mnogości D. Dlatego powinniśmy pisać $\varphi(x),\ x \in D$. Jest to inne oznaczenie predykatu φ. Natomiast zapis $\varphi(x_o)$ oznacza, że argument x ma ustaloną wartość x_o i wtedy $\varphi(x_o)$ jest zdaniem logicznym. Można powiedzieć, że $\varphi(x_o)$ jest wartością predykatu φ dla argumentu x_o. W takim razie biorąc wartość predykatu dla danego argumentu, zamieniamy predykat na zdanie logiczne. W tym sensie predykat stanowi uogólnienie zdania logicznego.*

Uwaga 3.2 *Niech dany będzie predykat $\varphi(x),\ x \in D$. Umówimy się, że biorąc zdanie $\varphi(x_o)$ dla pewnego $x_o \in D$, zdanie to będzie prawdziwe. Analogicznie pisząc $\neg\varphi(x_1)$ dla pewnego $x_1 \in D$ będziemy zakładali, że zdanie $\varphi(x_1)$ jest fałszywe.*

Następujący fakt tłumaczy zasady konstruowania zdań z wykorzystaniem predykatu.

Fakt 3.1 *Niech $\varphi(x),\ x \in D$ będzie predykatem. Wtedy następujące dwie konstrukcje prowadzą do zdań logicznych:*

1.

$$\forall_{x \in D}\ \varphi(x),\ \text{(czyt. "dla każdego argumentu } x \text{ zachodzi } \varphi(x)\text{")},$$

2.

$$\exists_{x \in D}\ \varphi(x)\ \text{(czyt. "istnieje co najmniej jeden argument } x \text{, że zachodzi } \varphi(x)\text{")}.$$

Uwaga 3.3 *Sybmbol $\exists$ użyty powyżej nazywamy kwantyfikatorem szczegółowym.*

Następujący przykład (zostawiamy go jako ćwiczenie) dostatecznie wyjaśnia znaczenie powyższych konstrukcji.

Przykład 3.1 *Niech predykat φ będzie określony na dziedzinie D złożonej ze skończonej ilości elementów, powiedzmy a, b, c. Pokazać, że*

$$\forall_{x\in D}\ \varphi(x) \equiv \varphi(a) \wedge \varphi(b) \wedge \varphi(c).$$

Podobnie

$$\exists_{x\in D}\ \varphi(x) \equiv \varphi(a) \vee \varphi(b) \vee \varphi(c).$$

Stąd łatwo już wyprowadzić zasady negacji tych zdań–wystarczy skorzystać ze znanych praw de Morgana. Mamy bowiem

Fakt 3.2

$$\neg\Big(\forall_{x\in D}\ \varphi(x)\Big) = \exists_{x\in D}\ \Big(\neg\varphi(x)\Big),\ \neg\Big(\exists_{x\in D}\ \varphi(x)\Big) = \forall_{x\in D}\ \Big(\neg\varphi(x)\Big).$$

Przykład 3.2 *Wykorzystując powyższe reguły negacji wyjaśnć znaczenie potocznego zwrotu "wyjątek potwierdza regułę".*